



# Catalogage de petits débris spatiaux en orbite basse par observations radars isolées

Thibaut Castaings

## ► To cite this version:

Thibaut Castaings. Catalogage de petits débris spatiaux en orbite basse par observations radars isolées. Autre. Université de Grenoble, 2014. Français. NNT : 2014GRENT001 . tel-00955486v3

**HAL Id: tel-00955486**

**<https://theses.hal.science/tel-00955486v3>**

Submitted on 17 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Signal, Image, Parole, Télécoms**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

présentée par

**Thibaut Castaings**

préparée au sein de l'**Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA)** et de l'**École Doctorale Electronique Electrotechnique Automatique Traitement du Signal (EEATS)**

## Catalogage de petits débris spatiaux en orbite basse par observations radars isolées

Thèse soutenue publiquement le **21 Janvier 2014**,  
devant le jury composé de :

**M. Olivier Michel**, Président

Institut National Polytechnique de Grenoble (Grenoble-INP)

**M. Thomas Schildknecht**, Rapporteur

Astronomical Institute of the University of Bern (AIUB)

**M. Frédéric Dambreville**, Rapporteur

Direction Générale de l'Armement (DGA)

**M. Pascal Faucher**, Examinateur

Centre National d'Études Spatiales (CNES)

**Mme Michèle Rombaut**, Directrice de thèse

Grenoble Images Parole Signal Automatique (GIPSA-Lab)

**M. Benjamin Pannetier**, Co-directeur de thèse

Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA)

**M. Florent Muller**, Co-directeur de thèse

Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA)





# Remerciements

Je tiens à remercier les membres du jury pour le temps consacré à l'évaluation de ces travaux de thèse. Je suis tout particulièrement reconnaissant envers Messieurs Thomas Schildknecht et Frédéric Dambreville pour m'avoir fait l'honneur d'examiner mon manuscrit jusque dans les plus fins détails. Je remercie très sincèrement Monsieur Olivier Michel pour avoir présidé le jury de cette thèse et pour la grande intégrité dont il a fait preuve en maintenant sa présence lors de cette journée du 21 Janvier alors qu'il était fortement sollicité par ailleurs. De même, Monsieur Pascal Faucher m'a fait l'honneur de participer à ce jury malgré sa faible disponibilité. Les commentaires émis et les discussions que nous avons eues constituent autant de points de vue enrichissants, éclairés par les expertises respectives et la grande qualité des membres du jury.

Je remercie très chaleureusement mon équipe encadrante, qui a su se montrer efficace et complémentaire :

Benjamin Pannetier, pour son expertise en pistage qui va jusqu'à la connaissance parfaite d'ouvrages de référence. Sa mémorisation impressionnante du sommaire du Blackman et du Bar-Shalom est un indicateur fort de sa maîtrise sur le sujet et l'a rendu immédiatement très crédible à mes yeux alors néophytes. Je tiens par ailleurs à rendre justice au soutien moral que Benjamin m'a apporté (parfois même sans s'en rendre compte), quand le soutien technique était difficile du fait de la pluralité des domaines couverts.

Florent Muller, pour son expertise système et ses connaissances en systèmes radars et modèles orbitaux. La rigueur, l'exigence vis-à-vis de soi, et une vraie passion pour le domaine spatial sont autant d'enseignements que j'ai reçus et qui, je l'espère, m'ont été transmis.

Michèle Rombaut, pour son sens de la pédagogie et sa curiosité authentique pour tous les domaines scientifiques. Son ouverture d'esprit vis-à-vis des domaines qui ne sont pas directement liés aux siens et sa virtuosité dans l'art d'expliquer simplement ont été des éléments à mon sens fondamentaux pour conclure cette thèse.

J'ai reçu au cours de ces trois années l'aide ponctuelle mais précieuse de nombreuses personnes. Je souhaite remercier très chaleureusement Bertrand Le Saux pour les conseils de grande qualité qu'il m'a donnés à des moments charnières. Il est important de mentionner qu'il est celui qui m'a incité à utiliser un algorithme de classification binaire pour l'estimation du modèle statistique qui occupe maintenant une place centrale parmi les contributions de cette thèse. Grâce à sa très vaste culture et à son expérience, l'algorithme de classification a pu être mis en œuvre et exploité de

manière efficace en un laps de temps très court, et fournir à ces travaux, par certains aspects, des garanties théoriques plus solides.

Je souhaite également remercier très chaleureusement Nicolas Bérend pour un très important service logistique rendu. Par ailleurs, certaines analyses dont il a pu me faire part ont guidé certains choix pour les étapes de détermination d'orbite.

La liste est longue, et pour éviter toute omission je laisse le soin aux personnes qui se reconnaîtront d'accepter mes plus sincères remerciements pour m'avoir prodigué les analyses et points de vue qui m'ont permis de progresser dans la problématique de cette thèse.

Ces trois années passées à l'ONERA sont pour moi une mosaïque de belles rencontres et de moments exceptionnels. Outre leurs qualités scientifiques, je souhaite témoigner avant tout des grandes qualités humaines des personnes que j'ai côtoyées. J'ai choisi de faire cela en vous livrant quelques passages d'un journal que j'ai tenu lors de mes débuts en tant que doctorant.

C'est au moment de m'en aller que je me souviens de comment tout cela a commencé.

*1er jour :*

*Je découvre mon superviseur. Il ressemble à Tom Cruise. Il me conduit au Bâtiment N, le nouveau fleuron de la flotte. Nous passons par un tunnel style « Zone 51 », les néons au plafond me font penser à une rampe de lancement. J'aperçois dans des alcôves des soi-disant maquettes de missiles. Je ne mords pas une seconde : nul doute que tout cet attirail est opérationnel. Tom me présente une multitude de geeks. Aucun ne donne l'impression d'avoir un profil psychologique standard. Il paraît que ces personnes ont passé les 20 dernières années dans un lieu conçu pour abriter un asile psychiatrique. J'aurais pu le deviner aux propos irrationnels que j'entends depuis que je suis arrivé. Des exosquelettes pour les vaches ? Pourquoi pas des cigarettes électroniques ! Je soupçonne quelque chose dans l'air qui altère le jugement. Il me faudra être prudent si je veux subsister.*

*6ème jour :*

*Les geeks semblent s'habituer à ma présence. Je peux aller et venir dans les couloirs sans plus sentir ces regards mêlant à la fois suspicion et indifférence. Je commence à remarquer les particularités de certains. L'un d'eux me harcèle depuis plusieurs jours pour que je touche ses biceps. J'ai fini par céder et je comprends maintenant pourquoi. Leur fermeté est telle que je me suis fait une tendinite à l'index au premier contact.*

Je n'aurais su dire alors si cela était de la malveillance et n'en adoptai un comportement que plus méfiant à l'égard de cet individu, mais je compris plus tard que ces biceps étaient le symbole de l'effort physique, essentiel et vital, que j'ai enduré au cours de ces trois années sous la pression incessante de celui que je nommais pour moi-même « Coach ». Coach m'a aidé à me vider l'esprit et pour cela je lui suis reconnaissant, car l'équilibre est la clé.

*10ème jour :*

*Je remarquais une sorte de dandy barbu lorsque celui-ci m'accusât gratuitement de ne pas savoir lire. N'étant pas assez familier avec les us et coutumes de cet endroit, je décidais de ne pas prendre ombrage de ce commentaire et essayais de me convaincre*

---

*que Dandy n'avait pas une attitude hostile en dépit des apparences mais essayait bel et bien de se montrer amical.*

C'est avec le temps que Dandy et moi apprîmes à nous comprendre et je dois admettre aujourd'hui que Dandy fait partie des soutiens moraux sans lesquels ma barque se serait certainement échouée.

*11ème jour :*

*Je pense que certains individus vivent ici. Je n'ai jamais vu le geek à l'air sympathique arriver ou partir, il est toujours là. Je décidai de tenter une expérience en le sollicitant pour une tâche triviale. Il s'en acquittât. Quiconque à sa place m'aurait refusé ce service. J'en déduisis que cet être était doué d'une capacité d'empathie hors du commun et que pour cela, il était devenu le pilier du département. Sans lui tout s'effondre, j'en ai acquis la certitude.*

Cet ami m'a tiré du pétrin maintes fois, et le récit de ses exploits pourrait faire l'objet d'un livre malgré les quelques faux pas dont il s'est rendu coupable comme par exemple le consternant pistolet à bisous.

*20ème jour :*

*Je réalise que les doctorants fournissent un effort intense et perpétuel alors qu'ils sont peu considérés par la société. Ce constat m'est clairement apparu au fil de discussions avec deux individus plutôt discrets, l'un aux airs de philosophe, l'autre tenant des propos de grand voyageur marin. Sous leurs airs mystérieux, je ne saurais déterminer avec précision leur degré d'ironie : les doctorants se nourrissent-ils vraiment de pain rassis ?*

Je ne livrerai pas la réponse à cette question, mais avec le recul je peux affirmer que les doctorants s'endurcissent : ils deviennent solides, solidaires, et tous incroyablement optimistes malgré la tempête qui s'acharne. Aurélien, Joseph, Christophe, Laure, Guillaume, Pauline, Paul, Oana, Achille et les autres, vous m'avez montré la voie et soutenu, parfois malgré vous, dans les moments difficiles.

Je ressens une nostalgie toute particulière quand je pense à Coco, mon co-bureau, et à tous ces moments inoubliables. Avec Coco, nous partageons nos joies, nos peines et nos ambitions.

Quant à Isabelle, Hicham et Maxime, n'abandonnez pas le combat, défendez avec ferveur l'honneur des doctorants et transmettez leur trésor pour que jamais ne s'éteigne le flambeau.

La méfiance de mes débuts laissa peu à peu la place à un sentiment de forte intégration. Le déjeuner, rituel toujours très convivial, et les autres moments de détente bien mérités qui rythment les journées m'ont permis de connaître les nombreux personnages qui font le DTIM. Les éclats de rires, les caricatures, les vanes gratuites, les conversations (souvent sans queue ni tête) sont ce que je retiens de tous ces bons moments.

J'espère que vous serez convaincus du plaisir sincère que j'éprouve à me remémorer ces trois années pendant lesquelles vous m'avez accueilli. J'ai la chance d'avoir trouvé parmi vous des camarades précieux, sinon des amis.

Hélas rien n'est éternel. Les doctorants défilent, le monde ne s'arrête pas.

Et d'autres camarades à leur tour mêlent leurs destins au mien.

# Table des matières

Acronymes	xi
Lexique	xiii
Notations	xv
<b>I Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Contexte de la surveillance de l'espace</b>	<b>3</b>
1.1 L'espace, un domaine critique . . . . .	4
1.2 L'anti-collision, une application de la surveillance de l'espace . . . . .	5
1.2.1 La menace des débris spatiaux . . . . .	5
1.2.2 Catalogage des débris en orbite basse . . . . .	6
1.3 Systèmes existants . . . . .	7
1.3.1 Le réseau de surveillance spatiale américain (U.S. Space Surveillance Network) . . . . .	7
1.3.2 Les systèmes européens . . . . .	9
1.4 Conclusion du chapitre . . . . .	9
<b>2 Paramétrage d'un radar pour la détection de petits objets</b>	<b>11</b>
2.1 Principe fondamental et définitions . . . . .	12
2.2 Mode de balayage Track While Scan (TWS) . . . . .	12
2.3 Émission pulsée versus émission continue . . . . .	14
2.3.1 Cas du radar monostatique en émission pulsée . . . . .	14
2.3.2 Cas du radar bistatique en émission pulsée ou continue . . . . .	16
2.4 Traitement du signal reçu . . . . .	16



2.4.1	Chaîne de détection . . . . .	17
2.4.2	Non-détections et fausses alarmes . . . . .	17
2.5	Influence de la fonction sur le choix de la longueur de l'onde émise . .	20
2.5.1	RSB en fonction des paramètres du radar et des cibles . . . .	20
2.5.2	Influence du FOR $\Psi$ . . . . .	21
2.5.3	SER en fonction de la longueur de l'onde émise . . . . .	21
2.6	Choix d'une configuration et d'un paramétrage de capteur envisageable	23
2.6.1	Choix d'une configuration monostatique pulsée . . . . .	23
2.6.2	Géométrie du champ de veille (Field Of Regard, FOR) . . . .	24
2.6.3	Précision des mesures . . . . .	25
2.7	Conclusion du chapitre . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Modèles dynamiques et satellites en orbite basse</b>	<b>27</b>
3.1	Systèmes de coordonnées usuels . . . . .	28
3.1.1	Référentiels géocentriques inertiel (ECI) et fixe (ECF) . . . .	28
3.1.2	Référentiel Géodésique . . . . .	28
3.2	Potentiel terrestre . . . . .	29
3.3	Le modèle képlérien . . . . .	30
3.3.1	Modèle simple . . . . .	30
3.3.2	Dérive des paramètres orbitaux . . . . .	32
3.4	Le modèle SGP . . . . .	33
3.4.1	Modélisation du potentiel terrestre . . . . .	33
3.4.2	Modélisation paramétrique de la traînée atmosphérique . . . .	34
3.5	Le catalogue Space-Track . . . . .	34
3.5.1	Format des éléments . . . . .	34
3.5.2	Distribution des paramètres orbitaux . . . . .	35
3.6	Conclusion du chapitre . . . . .	36
	<b>Conclusion de la première partie</b>	<b>37</b>

## II Synthèse et analyse des techniques existantes contri-

<b>uant au catalogage</b>	<b>39</b>
<b>Introduction de la deuxième partie</b>	<b>41</b>
<b>4 Pistage</b>	<b>43</b>
4.1 Pistage Monocible . . . . .	44
4.1.1 Modélisation paramétrique . . . . .	44
4.2 Estimation d'un état à partir d'une piste existante . . . . .	45
4.3 Pistage multicible . . . . .	48
4.3.1 Approches bayésiennes . . . . .	51
4.3.2 Approches non-bayésiennes . . . . .	53
4.4 Choix d'un TO-MHT résultant des contraintes d'emploi . . . . .	56
4.5 Conclusion du chapitre . . . . .	58
<b>5 Détermination d'orbite préliminaire</b>	<b>61</b>
5.1 Problématique de la Détermination d'Orbite Initiale . . . . .	62
5.2 Trois observations de position . . . . .	63
5.2.1 Méthode de Gibbs . . . . .	63
5.2.2 Méthode de Herrick-Gibbs . . . . .	64
5.3 Deux observations de position . . . . .	65
5.3.1 Méthode de Gauss . . . . .	66
5.3.2 Méthode de Battin et révolutions multiples . . . . .	67
5.4 Méthode des débris virtuels (Virtual Debris) . . . . .	68
5.4.1 Principe . . . . .	68
5.4.2 Résultats publiés . . . . .	69
5.5 Insuffisance des techniques existantes . . . . .	70
5.5.1 Pour l'association initiale . . . . .	70
5.5.2 Pour la Détermination d'Orbite Initiale (IOD) . . . . .	71
5.6 Conclusion du chapitre . . . . .	71
<b>Conclusion de la deuxième partie</b>	<b>73</b>
 <b>III Traitement des observations issues d'un radar à champ</b>	

<b>de veille restreint pour le catalogage de petits débris</b>	<b>75</b>
<b>Positionnement</b>	<b>77</b>
<b>6 Association initiale par modélisation comportementale</b>	<b>81</b>
6.1 Paires d'observations à une révolution d'intervalle . . . . .	82
6.1.1 Observations issues du capteur supposé . . . . .	83
6.2 Discrimination des paires d'observations . . . . .	86
6.2.1 Structure de l'algorithme résultant . . . . .	86
6.2.2 Base d'apprentissage . . . . .	87
6.2.3 Estimation du support par One-Class SVM . . . . .	88
6.2.4 Calcul d'un rapport de vraisemblance . . . . .	92
6.3 Évaluation préliminaire des performances . . . . .	95
6.3.1 Fenêtrage . . . . .	95
6.3.2 Score . . . . .	97
6.3.3 Rappel et ambiguïté obtenus par fenêtrage et SPRT . . . . .	98
6.4 Conclusion du chapitre . . . . .	98
<b>7 Initialisation du pistage</b>	<b>99</b>
7.1 Principe . . . . .	101
7.2 Approximation de l'orbite circulaire $\mathbf{X}_4$ . . . . .	102
7.2.1 Nécessité d'un bruit de modèle . . . . .	103
7.3 Association de troisièmes observations par transformation non-parfumée	104
7.3.1 Prédiction des observations . . . . .	104
7.3.2 Fenêtrage . . . . .	105
7.4 Estimation d'orbite définitive $\mathbf{X}_7$ . . . . .	105
7.4.1 Critère minimisé . . . . .	106
7.4.2 Implémentation de l'algorithme de Gauss-Newton . . . . .	106
7.4.3 Critère de convergence et de validité . . . . .	108
7.5 Évaluation des performances . . . . .	108
7.5.1 Données de test . . . . .	108
7.5.2 Convergence d'un algorithme de Gauss-Newton comme critère de validation . . . . .	109

7.5.3	Fenêtrage . . . . .	110
7.6	Conclusion du chapitre . . . . .	112
<b>8</b>	<b>Intégration du traitement multicible</b>	<b>113</b>
8.1	Principe du Track-Oriented Multiple Hypothesis Tracker (TO-MHT)	114
8.1.1	Hypothèse fondamentale . . . . .	114
8.1.2	Principe . . . . .	114
8.1.3	Formation des pistes . . . . .	115
8.1.4	Évaluation de la qualité individuelle des pistes . . . . .	116
8.1.5	Construction de solutions globales . . . . .	120
8.1.6	Suppression de pistes au niveau global . . . . .	121
8.1.7	Mise-à-jour des états . . . . .	124
8.1.8	Fusion de pistes . . . . .	124
8.2	Évaluation des performances . . . . .	125
8.2.1	Choix des critères d'évaluation . . . . .	125
8.2.2	Choix des scénarios de test . . . . .	126
8.2.3	Dégradation des observations . . . . .	126
8.2.4	Évolution temporelle des critères de performance principaux .	127
8.2.5	Évolution temporelle des critères de performance annexes . . .	128
8.2.6	Sensibilité des paramètres de dimensionnement du radar . . .	129
8.2.7	Conclusion des tests de performance . . . . .	132
8.3	Conclusion du chapitre . . . . .	132
<b>9</b>	<b>Modélisation de la complexité combinatoire</b>	<b>135</b>
9.1	Analyse combinatoire . . . . .	136
9.1.1	Modélisation paramétrique de la complexité combinatoire . . .	136
9.1.2	Modélisation paramétrique du nombre instantané de nouvelles pistes $\mathbf{m}(\mathbf{k})$ . . . . .	138
9.2	Calibration du modèle . . . . .	139
9.2.1	Détermination des paramètres liés à la performance du cata- logage $\alpha$ , $\lambda$ et $\kappa$ . . . . .	139
9.2.2	Détermination des paramètres liés au temps $\mathbf{I}_{1,\min}$ , $\mathbf{I}_{1,\max}$ , $\mathbf{I}_{2,\min}$ , $\mathbf{I}_{2,\max}$ , $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ . . . . .	140

9.2.3	Détermination du coefficient de précision $\mathbf{a}_{1,2}$ . . . . .	141
9.3	Extrapolations . . . . .	142
9.3.1	Discussion sur la validité des prédictions . . . . .	143
9.4	Systèmes à plusieurs capteurs . . . . .	144
9.4.1	Système de deux capteurs opposés en longitude . . . . .	145
9.4.2	Système de deux capteurs de même longitude . . . . .	145
9.4.3	Analyse et comparaison de performances . . . . .	146
9.5	Conclusion du chapitre . . . . .	147
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>149</b>
<b>Communications scientifiques</b>		<b>155</b>
<b>Annexes</b>		<b>159</b>
<b>A Filtre optimal par corrélation</b>		<b>159</b>
<b>B Passage d'un référentiel terrestre fixe à un référentiel géodésique (et vice-versa)</b>		<b>161</b>
<b>C Équivalence entre les paramètres orbitaux képlériens et un couple position-vitesse</b>		<b>163</b>
C.1	Passage d'un couple position-vitesse vers les paramètres orbitaux ké- plériens . . . . .	163
C.2	Passage des paramètres orbitaux képlériens vers un couple position- vitesse . . . . .	164
<b>D Association des détections issues du passage d'un objet dans le champ de veille</b>		<b>165</b>

# Acronymes

AT	Active Tracking (poursuite active)
BMEWS	Ballistic Missile Early Warning System (système d'alerte avancée)
DO	Definitive Orbit (orbite définitive)
ECF	Earth Centered Fixed (référentiel géocentrique fixe)
ECI	Earth Centered Inertial (référentiel géocentrique inertiel)
ENU	East-North-Up (référentiel local Est-Nord-Haut)
ESA	European Space Agency
ESAOGS	ESA Optical Ground Station
FFC	Formation de Faisceaux par le Calcul
FA	Fausse Alarme
FP	Fausse Piste confirmée
FOR	Field Of Regard (champ de veille)
FOV	Field Of View (champ de vue)
GEO	Geosynchronous Earth Orbit
GM-PHD	Gaussian-Mixture Probabilistic Hypothesis Density
GNN	Global Nearest Neighbor
HO-MHT	Hypothesis-Oriented Multiple Hypothesis Tracker
IOD	Initial Orbit Determination (détermination d'orbite initiale)
IO	Initial Orbit (orbite initiale)
JPDAF	Joint-Probabilistic Data Association Filter
LEO	Low Earth Orbit (orbite basse)
GRAVES	Grand Réseau Adapté à la Veille Spatiale
ISS	International Space Station
MHT	Multiple Hypothesis Tracker
PDAF	Probabilistic Data Association Filter
PHD	Probabilistic Hypothesis Density
PRI	Période de Répétition de l'Impulsion

RSB	Rapport Signal à Bruit
SGP	Simplified General Perturbations
SPRT	Sequential Probability Ratio Test
SSN	Space Surveillance Network
SER	Surface Équivalente Radar
SVM	Support Vector Machine (machine à vecteurs de support)
TO-MHT	Track-Oriented Multiple Hypothesis Tracker
TWS	Track-While-Scan
USSTRATCOM	US Strategic Command

# Lexique

Arc	Ensemble de détections issues du même objet lors d'un unique passage dans le champ de veille
Arc court	Arc dont on ne peut déduire une orbite précise du fait d'un faible nombre de détections, de leur proximité et de leurs erreurs de mesure
Champ de veille	Zone de l'espace parcourue par le champ de vue lors d'un balayage
Champ de vue	Zone de l'espace surveillée à un instant ponctuel ( <i>i.e.</i> faisceau)
Détection	Mesure de position lorsque le $RSB$ dépasse un certain seuil
Observation	Arc court, <i>i.e.</i> une, ou deux observations fortement redondantes (proximité et erreur de mesure). Dans cette étude, nous choisissons arbitrairement d'utiliser les coordonnées de la première détection.
Observabilité	Caractère d'un système dynamique dont on peut déduire l'état à partir des observations disponibles
Observation isolée	Observation ne permettant pas l'observabilité du système dynamique sous-jacent
Piste	Séquence d'observations associées





# Notations

## Notations générales

$a$	Une lettre en italique indique un scalaire ou une fonction
$ a $	Valeur absolue du scalaire $a$
$\text{sgn}(a)$	Signe du scalaire $a$
$f^{-1}$	Inverse de la fonction $f$
$\mathbf{a}$	Une lettre en gras indique un vecteur
$\ \mathbf{a}\ $	Norme euclidienne du vecteur $\mathbf{a}$
$\mathbf{M}$	Une lettre capitale en gras indique une matrice
$\mathbf{M}^T$	Transposée de la matrice $\mathbf{M}$
$\mathbf{M}^{-1}$	Inverse de la matrice $\mathbf{M}$
$ \mathbf{M} $	Déterminant de la matrice $\mathbf{M}$
$'$	Dérivée
$:$	Dérivée temporelle
$\partial$	Dérivée partielle
$\hat{\cdot}$	Estimée
$\bar{\cdot}$	Prédiction
$\wedge$	Produit vectoriel

## Notations liées au fonctionnement d'un radar

$T_{\text{PRI}}$	Période de répétition de l'impulsion
$t_{\text{er}}$	Durée de propagation d'une impulsion
$\tau$	Largeur temporelle de l'impulsion
$R$	Distance capteur-cible (cas monostatique)
$\Delta R$	Erreur de mesure de la distance capteur-cible
$\dot{R}$	Vitesse projetée sur l'axe capteur-cible (vitesse radiale)
$\Delta\Phi$	Déphasage entre deux impulsions successives
$R_{\text{e}}$	Distance émetteur-cible (cas bistatique)
$R_{\text{r}}$	Distance récepteur-cible (cas bistatique)
$\dot{R}_{\beta}$	Vitesse projetée sur la bissectrice de l'angle $\beta$

---

$\beta$	Angle émetteur-cible-récepteur dans le triangle bistatique
$\theta_r$	Angle de visée de l'antenne de réception dans le triangle bistatique
$L_\beta$	Ligne de base entre les sites d'émission et de réception
$c$	Vitesse de propagation de la lumière
$f_e$	Fréquence de l'onde émise
$\lambda_e$	Longueur de l'onde émise
$RSB$	Rapport Signal à Bruit
$P_r$	Puissance du signal reçu
$P_{\Sigma_b}$	Puissance du bruit
$R_{\text{réf}}$	Distance de référence
$P_D$	Probabilité de détection
$P_{\text{FA}}$	Probabilité de fausse alarme
$s_D$	Seuil de détection appliqué au RSB
$b$	Signal aléatoire lié au bruit seul
$\Sigma_b$	Somme de réalisations de $b$
$P$	Puissance fournie
$G_e$	Gain de l'antenne d'émission
$G_r$	Gain de l'antenne de réception
$dP_e$	Densité surfacique de puissance émise
$S_e$	Surface de l'antenne d'émission
$S_r$	Surface de l'antenne de réception
$\sigma$	Surface équivalente radar
$L$	Facteur de perte ou de gain lié au trajet de l'onde
$k$	Constante de Boltzmann
$T$	Température équivalente de bruit thermique
$\Delta F$	Largeur de bande après filtrage
$t_p$	Durée d'un pointage
$t_v$	Période de revisite
$N$	Nombre de pointages par balayage
$\eta$	Charge en poursuite
$\beta_v$	Taux de recouvrement des faisceaux en veille
$\Psi$	Volume du champ de veille
$\Theta$	Ensemble des paramètres du radar
$l$	Largeur de l'antenne (cas monostatique)
$\rho$	Mesure de distance capteur-cible
$\theta$	Mesure d'azimut
$\phi$	Mesure d'élévation
$\sigma_\rho$	Précision de mesure radiale
$\sigma_\theta$	Précision de mesure angulaire en azimut
$\sigma_\phi$	Précision de mesure angulaire en élévation

---

## Notations liées aux différents référentiels

$\mathbf{u}_X^{\text{ECF}}$	Premier vecteur unitaire d'un repère géocentrique fixe (suit la rotation de la Terre)
$\mathbf{u}_Y^{\text{ECF}}$	Deuxième vecteur unitaire d'un repère géocentrique fixe
$\mathbf{u}_Z^{\text{ECF}}$	Troisième vecteur unitaire d'un repère géocentrique fixe
$\mathbf{u}_X^{\text{ECI}}$	Premier vecteur unitaire d'un repère géocentrique inertiel
$\mathbf{u}_Y^{\text{ECI}}$	Deuxième vecteur unitaire d'un repère géocentrique inertiel
$\mathbf{u}_Z^{\text{ECI}}$	Troisième vecteur unitaire d'un repère géocentrique inertiel
$\mathbf{R}_{\text{ECF}}$	Repère du référentiel géocentrique fixe (ECF)
$\mathbf{R}_{\text{ECI}}$	Repère du référentiel géocentrique inertiel (ECI)
$\mathbf{R}_{\text{ENU}}$	Repère du référentiel local East-North-Up (ENU)
$\theta_{\text{sidéral}}$	Angle de rotation de la Terre autour de l'axe polaire $\mathbf{u}_Z^{\text{ECF}} = \mathbf{u}_Z^{\text{ECI}}$
$\omega_{\text{sidéral}}$	Vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe polaire $\mathbf{u}_Z^{\text{ECF}} = \mathbf{u}_Z^{\text{ECI}}$
$\mathbf{r}_{\text{site}}$	Vecteur des coordonnées du capteur dans un repère ECF
$\mathbf{R}_{\mathbf{u}_Z}$	Rotation autour de l'axe $\mathbf{u}_Z$
$r_{\text{éq}}$	Rayon terrestre à l'équateur
$r$	Distance d'un point au centre de la Terre
$\theta_{\text{géo}}$	Longitude
$\phi_{\text{géo}}$	Latitude
$h_{\text{géo}}$	Altitude

## Notations liées aux modèles de dynamique orbitale

$\mathbf{f}_{\text{TS}}$	Force résultante de l'attraction gravitationnelle entre T et S
$\mathbf{d}_{\text{TS}}$	Distance entre T et S
$K$	Constante gravitationnelle universelle
$\mu$	Paramètre gravitationnel terrestre standard
$m_{\text{T}}$	Masse de T
$\mathbf{grad}_S$	Gradient selon S
$U_{\text{T}}(S)$	Potentiel gravitationnel de T au point S
$J_2$	Harmonique zonale d'ordre 2 du potentiel terrestre
$J_n$	Harmonique zonale d'ordre $n$ du potentiel terrestre
$P_n$	Polynome de Lagrange d'ordre $n$
$p_{\text{réf}}$	Pression de référence
$h_{\text{réf}}$	Altitude de référence
$H$	Facteur d'échelle d'altitude
$\mathbf{a}_{\text{drag}}$	Accélération de traînée
$f_{\text{SGP}}$	Fonction de propagation SGP

---

$\mathbf{r}$	Vecteur position
$\mathbf{v}$	Vecteur vitesse
$t_o$	Date des paramètres orbitaux
$a_o$	Demi-grand axe
$n_o$	Mouvement moyen
$e_o$	Excentricité
$i_o$	Inclinaison
$\Omega_o$	Longitude du nœud ascendant
$\omega_o$	Argument du périégée
$\nu_o$	Anomalie vraie
$M_o$	Anomalie moyenne
$E_o$	Anomalie excentrique
$B^*$	Coefficient de traînée
$\mathbf{X}_{t_o}$	Jeu de paramètres orbitaux datés de $t_o$

### Notations liées au pistage

$\mathbf{x}$	État d'un système
$\mathbf{z}$	Observation
$f$	Fonction de propagation
$h$	Fonction d'observation
$\zeta$	Bruit de modèle
$\eta$	Bruit d'observation
$\mathbf{F}$	Matrice associée à la linéarisation de $f$
$\mathbf{H}$	Matrice associée à la linéarisation de $h$
$\mathbf{V}$	Matrice de covariance de $\zeta$
$\mathbf{W}$	Matrice de covariance de $\eta$
$\bar{\mathbf{z}}$	Observation prédite
$\tilde{\mathbf{z}}$	Innovation, c'est-à-dire $\tilde{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$
$\mathbf{S}$	Matrice de covariance de l'innovation $\tilde{\mathbf{z}}$
$\mathbf{K}$	Gain de Kalman
$\mathbf{X}_4$	Vecteur d'état associé à une orbite circulaire
$\mathbf{X}_7$	Vecteur d'état associé à une orbite SGP4
$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}},4}$	Matrice de covariance associée à l'estimée de $\mathbf{X}_4$
$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$	Matrice de covariance associée à l'estimée de $\mathbf{X}$
$\kappa_i$	$i$ -ème coefficient de la matrice diagonale $\mathbf{D}_4$
$\boldsymbol{\chi}^i$	$i$ -ème sigma-point (transformation non-parfumée)
$\varphi^i$	Poids associé au $i$ -ème sigma-point (transformation non-parfumée)

---

$\sqrt{\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}},4}^i}$	$i$ -ème colonne d'une matrice triangulaire $L$ obtenue par la décomposition de Cholesky de la matrice $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}},4}$
$\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}$	Estimation de $\mathbf{x}$ à l'instant $k + 1$ sachant les observations jusqu'à l'instant $k$
$d(\cdot, \cdot)$	Distance statistique ou distance de Mahalanobis
$s_F$	Seuil de fenêtrage
$Z$	Piste quelconque
$Z_i$	$i$ -ème piste d'observations dans un ensemble de pistes
$Z^k$	Ensemble des observations accumulées jusqu'au scan $k$
$Z(k)$	Ensemble des observations du scan $k$
$m_k$	Nombre d'observations au scan $k$
$\mathbf{z}_k^i$	$i$ -ème observation du scan $k$
$\tilde{\mathbf{z}}^t$	Innovation jointe associée à la piste $t$ (JPDAF)
$\tilde{\mathbf{z}}_i^t(k)$	Innovation de $\mathbf{z}_k^i$ vis-à-vis de la piste $t$ (JPDAF)
$\beta_i^t(k)$	Probabilité d'appartenance de l'observation $\mathbf{z}_k^i$ à la piste $t$ (JPDAF)
$h_j$	$j$ -ème hypothèse d'association d'observation à piste (HO-MHT)
$\theta_i^t$	Hypothèse "la $i$ -ème observation est issue du même objet que la piste $t$ "
$\theta_0^t$	Hypothèse "la piste $t$ n'est corrélée avec aucune observation"
$v$	Fonction d'intensité (GM-PHD)
$\mathbf{m}^i$	Moyenne de la $i$ -ème gaussienne (GM-PHD)
$\mathbf{P}^i$	Covariance de la $i$ -ème gaussienne (GM-PHD)
$w^i$	Poids associé à la $i$ -ème gaussienne (GM-PHD)
$J$	Nombre de cibles instantané (GM-PHD)
$\mathcal{N}$	Loi gaussienne
$d_{G_{ij}}^2$	Fonction de coût (GNN)
$\mathcal{S}$	Scénario d'association (0-1)
$\mathbf{A}$	Matrice binaire d'appartenance des observations aux pistes (0-1)
$\mathbf{b}_{\mathcal{S}}$	Vecteur binaire d'appartenance des pistes à un scénario d'association $\mathcal{S}$ (0-1)
$L_Z$	Log-vraisemblance associée à la piste $Z$
$H_1$	Hypothèse "Toutes les observations de la piste sont issues du même objet"
$H_0$	Hypothèse contraire de $H_1$ , $H_0 = \overline{H_1}$
$s_{\text{SPRT},1}$	Seuil en dessous duquel $L_Z$ indique que la piste $Z$ est de mauvaise qualité
$s_{\text{SPRT},2}$	Seuil au dessus duquel $L_Z$ indique que la piste $Z$ est de bonne qualité
$\alpha$	Erreur de type I (SPRT)
$\beta$	Erreur de type II (SPRT)

---

$h_{\text{capteur}}$	Fonction de passage d'un référentiel ECI à un référentiel capteur
$f_n$	Fonction composée $h_{\text{capteur}} \circ f_{\text{SGP}}$
$L$	Rapport de vraisemblance
$\Delta L$	Incrément du rapport de vraisemblance
$t_{\text{latence}}$	Délai entre une association et l'évaluation de la piste
$t_{\text{exp.}}$	Délai d'expiration d'une piste après la dernière association
$\mathcal{S}$	Solution faisable (ensemble de pistes compatibles)

### Notations liées à la détermination d'orbite initiale (IOD)

$\mathbf{r}$	Vecteur position dans un référentiel ECI
$\mathbf{e}$	Vecteur excentricité dans un référentiel ECI
$\alpha_{\text{coplanaire}}$	Angle-seuil de coplanarité
$\Delta\nu$	Différence d'anomalies vraies
$\Delta E$	Différence d'anomalies excentriques
$p$	"Paramètre" de l'ellipse
$y$	Rapport de deux aires permettant de retrouver $p$ par substitutions successives (méthode de Gauss)
$x_1, x_2$	Termes de substitutions successives (méthode de Gauss)
$\alpha, \delta$	Mesures d'angles dans un référentiel topocentrique (mesure télescope)
$\mathcal{E}_m$	Énergie mécanique
$\mathbf{r}_i$	Vecteur position associée à l'observation $\mathbf{z}_i$ dans un ECI
$\delta_p$	Angle signé formé par les vecteurs position d'une paire d'observations à une révolution d'intervalle
$\mathbf{p}$	Produit vectoriel de $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$

### Notations liées à l'estimation

$\varepsilon_Q$	Erreur quadratique
$\mathbf{x}_0$	État initial en entrée d'une boucle d'itérations
$\Delta\mathbf{x}$	Incrément de l'état d'un système dans une boucle d'itérations
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vecteur des résidus tel que $\varepsilon_Q = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}$
$\mathbf{J}_\varepsilon$	Matrice jacobienne de $\boldsymbol{\varepsilon}$
$s_C$	Seuil de convergence

### Notations liées à la première association

$\mathbf{x}(i, j)$	Vecteur de description de la paire d'observations $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\}$
$r$	Rayon géodésique (distance au centre de la Terre) d'une observation

---

$\tau$	Différence de temps entre les observations $\mathbf{z}_i$ et $\mathbf{z}_j$
$\lambda$	Différence de longitude entre les observations $\mathbf{z}_i$ et $\mathbf{z}_j$
$d_r$	Valeur absolue de la différence de rayon géodésique entre deux observations
$d_{r\lambda}$	Longueur de l'arc de longitude entre deux observations
$d_\theta$	Valeur absolue de la différence d'azimut de détection entre deux observations
$f^{\text{extr.}}$	Fonction de description d'une paire d'observations
$\mathbf{r}_{\text{obs.}}^{\text{ECI}}$	Vecteur capteur-cible observé par le capteur dans un référentiel ECI
$\mathbf{r}_{\text{capteur}}^{\text{ECI}}$	Vecteur position du capteur dans un référentiel ECI
$\mathcal{E}$	Ensemble des paires d'observations quelconques
$\mathcal{F}$	Ensemble des vecteurs de descriptions associés à des paires d'observations quelconques
$\mathcal{E}_{\text{1rév}}$	Ensemble des paires d'observations issues du même objet à une révolution d'intervalle
$\mathcal{F}_{\text{1rév}}$	Ensemble des vecteurs de descriptions associés aux paires d'observations issues du même objet à une révolution d'intervalle
$\mathcal{E}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$	Ensemble simulé des paires d'observations issues du même objet à une révolution d'intervalle
$\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$	Ensemble simulé des vecteurs de descriptions associés aux paires d'observations issues du même objet à une révolution d'intervalle
$\tau_{\min}(\Theta)$	Valeur minimale de $\tau$ pour les observations issues du même objet à une révolution d'intervalle
$\tau_{\max}(\Theta)$	Valeur maximale de $\tau$ pour les observations issues du même objet à une révolution d'intervalle
$p_{\mathcal{F}_{\text{1rév}}}$	Loi de probabilité associée à l'ensemble $\mathcal{F}_{\text{1rév}}$ dans l'espace $\mathcal{F}$
$Q(1 - \nu)$	Quantile à $1 - \nu$ d'un échantillon de $\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$
$\mu$	Mesure de volume (mesure de Lebesgue) : $\mu(C)$ est le volume de la région $C$
$g$	Fonction de décision de la One-Class SVM
$k$	Fonction noyau de la One-Class SVM
$\gamma$	Paramètre de la fonction de noyau gaussien
$\alpha_i$	Multiplieurs de Lagrange résultant de l'optimisation par One-Class SVM
$\mathbf{x}_{\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}}^n$	$n$ -ième vecteur de support sélectionné par la One-Class SVM
$b$	Seuil de détection résultant de l'optimisation par One-Class SVM
$s_{\text{Fp}}$	Seuil associé à la méthode particulière : proportion minimale de particules classifiées positives par la One-Class SVM
$\mathbf{D}$	Matrice diagonale des écart-types associés aux distances entre les échantillons (fenêtres de Parzen-Rosenblatt)
$N(\mathbf{z})$	Nombre d'observations formant une paire valide avec l'observation $\mathbf{z}$



---

$L_{i,j}$	Log-vraisemblance associée à la paire d'observations $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\}$
$l_{p,i,j}$	Log-vraisemblance associée à la $p$ -ième paire de particules issues d'une paire d'observations $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\}$
$\mathbf{x}_p(i, j)$	Vecteur de description de la $p$ -ième paire de particules issues d'une paire d'observations $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\}$
$S_c$	Ensemble des scores des associations correctes
$S_{\bar{c}}$	Ensemble des scores des associations incorrectes

### Notations liées à la complexité combinatoire

$N_{\text{GN}}^{\text{C}}$	Nombre de triplets d'observations formés instantanément
$b_1$	Distribution des intervalles de temps entre la première et la seconde observation d'une piste
$b_2$	Distribution des intervalles de temps entre la deuxième et la troisième observation d'une piste
$[I_{1,\min}, I_{1,\max}]$	Support de $b_1$
$[I_{2,\min}, I_{2,\max}]$	Support de $b_2$
$m(k)$	Nombre d'observations au scan $k$
$a$	Coefficient de précision d'une méthode de fenêtrage
$a_{1,2}$	Produit des coefficients de précision des méthodes de première et de deuxième association
$V_F$	Volume d'une fenêtre de validation
$V$	Volume surveillé
$m_{\text{FA}}$	Nombre moyen de fausses alarmes par scan
$m_{\text{obj.}}$	Nombre moyen d'observations issues d'objets réels
$g(k)$	Taux d'objets catalogués jusqu'au scan $k$
$\alpha$	Taux d'objets catalogués en fin de simulation
$\lambda$	Constante de décroissance
$\kappa$	Délai entre le début de la simulation et le suivi des premiers objets catalogués

# Première partie

## Introduction



# Chapitre 1

## Contexte de la surveillance de l'espace

Le but de ce chapitre est de montrer que les moyens de surveillance de l'espace sont nécessaires et complexes. Pour cela, nous évoquons plusieurs activités emblématiques de l'espace. Ensuite, nous décrivons de manière succincte quelques systèmes de surveillance existants afin de représenter le niveau de technologie accessible en termes de capteurs physiques.

### Sommaire

---

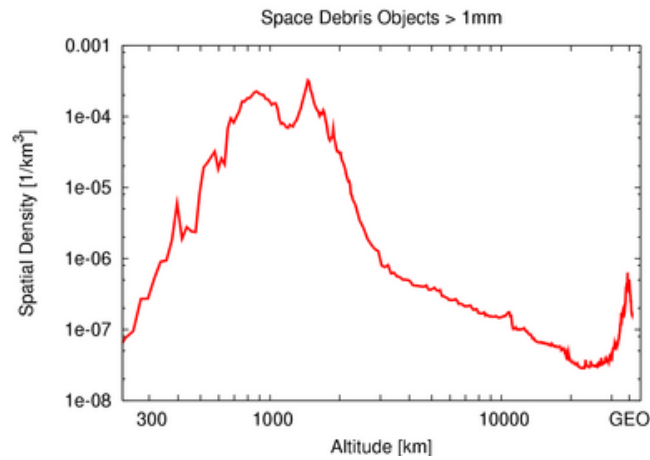
<b>1.1</b>	<b>L'espace, un domaine critique . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>1.2</b>	<b>L'anti-collision, une application de la surveillance de l'espace . . . . .</b>	<b>5</b>
1.2.1	La menace des débris spatiaux . . . . .	5
1.2.2	Catalogage des débris en orbite basse . . . . .	6
<b>1.3</b>	<b>Systèmes existants . . . . .</b>	<b>7</b>
1.3.1	Le réseau de surveillance spatiale américain (U.S. Space Surveillance Network) . . . . .	7
1.3.2	Les systèmes européens . . . . .	9
<b>1.4</b>	<b>Conclusion du chapitre . . . . .</b>	<b>9</b>

---

## 1.1 L'espace, un domaine critique

Depuis plusieurs décennies, les applications liées au domaine spatial sont devenues centrales dans les activités humaines. En effet, un grand nombre de programmes spatiaux civils et/ou militaires sont menés notamment à des fins de communication, de navigation, d'observation de la Terre ou de renseignement.

Dans cette thèse, nous nous intéressons exclusivement aux orbites basses (altitude inférieure à 2000 Km), ou “Low Earth Orbits” (LEO), du fait de leur forte concentration en satellites actifs et débris et des risques associés [1, 2, 3]. La Figure 1.1 montre la concentration de débris spatiaux en fonction de leur altitude.



**Figure 1.1** – La concentration des débris spatiaux est critique sur les orbites basses.

Une des applications les plus emblématiques des satellites artificiels est l’observation de la Terre. Les satellites d’observation de la Terre permettent d’observer de nombreux paramètres climatiques ou météorologiques à grande échelle, comme entre autres la couverture nuageuse ou l’état de la mer. Par exemple, le satellite Envisat avait notamment pour mission de mesurer la couleur des océans et des zones côtières pour évaluer certains paramètres océanologiques [4]. Les satellites d’observation de la Terre peuvent aussi assurer des missions dans la gestion de catastrophes. Par exemple, le satellite canadien Radarsat a déjà détecté et cartographié des déversements d’hydrocarbures, des zones sinistrées par un tremblement de terre ou un ouragan pour faciliter les opérations de Recherche et Sauvetage et permettre l’évaluation des dégâts [5].

De nombreuses autres applications civiles sont permises ou facilitées par l’utilisation de satellites, telles que par exemple les télécommunications et certaines missions scientifiques (géodésie, géodynamique, cosmologie, etc.).

Naturellement, les fonctions de navigation, de télécommunication et d’observation de la Terre jouent également un rôle crucial dans les opérations militaires. Sur un théâtre d’opération par exemple, la localisation et le guidage précis des forces et moyens est un avantage stratégique important. Des satellites (programme Syracuse en France) permettent la transmission sécurisée de données pour les troupes déployées. Enfin, des images satellitaires à haute résolution peuvent être fournies

par des satellites d'observation (comme le programme Hélios) avec une couverture mondiale et conformément au droit international pour, entre autres, le contrôle du respect des traités, l'alerte avancée ou encore le contrôle des armements. Des satellites d'écoute électromagnétique (le programme Elisa par exemple) permettent par exemple de repérer et d'identifier de manière préventive les moyens de défense radars d'autres pays.

## 1.2 L'anti-collision, une application de la surveillance de l'espace

La pérennité des activités évoquées précédemment repose en grande partie sur la sûreté des installations spatiales. Notre dépendance vis-à-vis de ces installations fait alors de l'espace un domaine sensible. D'un point de vue civil ou militaire, ces satellites doivent notamment être à l'abri de collisions accidentelles.

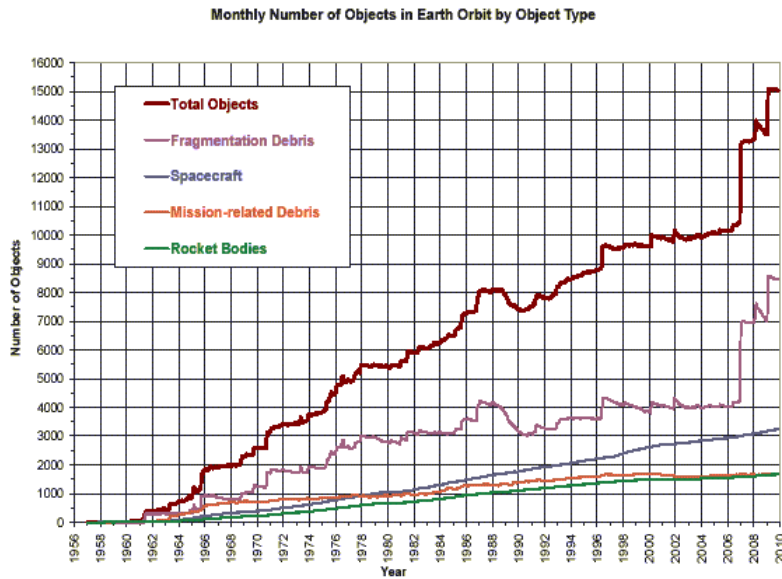
### 1.2.1 La menace des débris spatiaux

On regroupe sous le terme “débris spatiaux” tous les objets artificiels inactifs en orbite terrestre. Les éléments de lanceurs et les satellites inactifs constituent l'essentiel des gros débris (10 cm à 10 m), et leurs fragmentations suite à des collisions volontaires ou accidentelles, ou à des explosions en orbite génèrent un très grand nombre de débris plus petits (0.1 mm à 10 cm). Un grand nombre de particules de tailles inférieures existent [6]. Cela comprend notamment des gouttelettes de liquide de refroidissement (2 mm à 4 cm), des particules ferreuses issues de moteurs de fusées à propulseur solide (0.1 mm à 3 cm) ou encore des écailles de peinture (2  $\mu$ m à 0.2 mm).

Au cours du temps, le nombre de débris a fortement augmenté [7, 8] (Figure 1.2), notamment suite à des collisions accidentelles ou volontaires comme par exemple la destruction du satellite inactif Fengyun-1C lors d'un test de missile anti-satellite chinois en 2007 et la collision accidentelle entre les satellites Cosmos 2251 (Russie) et Iridium 33 (États-Unis). D'autres événements aux conséquences plus limitées peuvent être mentionnés, comme par exemple la collision accidentelle en 1996 entre ce qui a été identifié comme étant un morceau d'un lanceur Ariane-1 et le satellite de renseignement Cerise (France).

La dangerosité des débris spatiaux est double. D'une part, il existe un risque immédiat de perte d'un satellite suite à une collision, et d'autre part la collision peut générer de nouveaux débris. Si la densité de débris en orbite dépasse un certain seuil, ceux-ci pourraient entraîner d'autres collisions en cascade et détruire les satellites actifs. La densité de débris attendrait alors un niveau tel qu'il ne serait plus envisageable de mettre de nouveaux satellites en orbite (syndrome Kessler [9]).

Plusieurs facteurs peuvent causer la perte d'un satellite, mais le risque lié à une collision avec un débris prédomine si la densité de débris est importante. Actuelle-



**Figure 1.2** – Évolution du nombre de débris catalogués entre 1956 et 2010. Les sauts sont attribués à des collisions ou explosions catastrophiques. Crédit : NASA Orbital Debris Program Office.

ment, le système de surveillance américain dénombre plus de 15 000 débris de plus de 5 cm, et l'on estime qu'il y aurait plusieurs centaines de milliers de débris de plus de 1 cm, très concentrés sur les orbites basses.

Pour les gros débris, la tendance actuelle est de mettre en œuvre des moyens préventifs visant à réduire le nombre de débris générés lors des lancements, comme par exemple la passivation des étages supérieurs des lanceurs [6] (c'est-à-dire vidanger les réservoirs et baisser leur pression, décharger les batteries, *etc.*). Par ailleurs, des moyens de désorbitation actifs sont également à l'étude [10]. Quant aux débris de moins de 1 mm (moins de 1 cm pour la face exposée de l'ISS), ils peuvent être contrôlés par le blindage des éléments critiques des installations spatiales.

En revanche, une difficulté persiste pour contrer les petits débris (1 à 10 cm) puisque l'évitement semble être la seule option réaliste pour cette gamme de taille. L'évitement nécessite la connaissance des trajectoires du plus grand nombre possible de débris en orbite, ce qui peut être atteint grâce à des moyens de catalogage (c'est-à-dire de veille et de suivi) très onéreux.

### 1.2.2 Catalogage des débris en orbite basse

Le catalogage consiste à observer les objets à l'aide de capteurs et à caractériser leurs trajectoires (orbites) sur une fenêtre de temps large, c'est-à-dire connaître leurs positions passées, présentes et futures, lorsqu'ils sont dans l'emprise du capteur ou en dehors. Cette fonction s'appuie sur deux aspects complémentaires : d'une part les capteurs physiques doivent détecter les objets d'intérêt de manière suffisamment fréquente et observer leurs positions et/ou vitesses de manière suffisamment précise pour que d'autre part des algorithmes de traitement de l'information puissent carac-

tériser les trajectoires (calculs d'orbites) à partir des observations disponibles afin de pouvoir estimer les positions des objets (prédiction, filtrage ou rétrodiction).

La connaissance des orbites des objets en orbite basse qui constitueraient le catalogue permettrait alors la prédiction de positions futures et une confrontation deux à deux pour l'anti-collision) ou encore la caractérisation de certains événements passés comme par exemple l'explosion en orbite d'un étage de fusée Ariane en 1986, qui aurait provoqué en 1996 la destruction du satellite français Cerise.

Pour les orbites basses, le capteur radar est souvent l'option retenue face aux capteurs passifs car il ne dépend pas des conditions climatiques ou d'illumination (entre autres), bien que des systèmes mixtes radar et optique peuvent être envisagés pour couvrir le besoin sur certaines zones en altitude. Bien que sa conception soit très exigeante, un tel capteur est faisable grâce aux technologies actuelles malgré des contraintes en bilan énergétique très exigeantes.

### 1.3 Systèmes existants

Aujourd'hui, la surveillance de l'espace est devenue un domaine aux enjeux majeurs, comme nous l'avons évoqué dans les sections précédentes. C'est pour cela que les États-Unis et les pays européens, entre autres, développent des capacités de surveillance de l'espace. La présentation générale de certains systèmes existants, américains ou européens, permet d'avoir une idée du niveau de technologie accessible en fonction des efforts de développement fournis.

#### 1.3.1 Le réseau de surveillance spatiale américain (U.S. Space Surveillance Network)

Les États-Unis disposent d'un réseau de systèmes optiques et radars (Space Surveillance Network, SSN) répartis à la surface du globe [11]. Pour les orbites basses, les radars FPS-85 et Cobra Dane déployés respectivement sur les sites de Eglin, Floride, et Shemya, Alaska, sont des systèmes dédiés à la surveillance de l'espace en complément d'autres systèmes dont la mission principale est l'alerte anti-balistique (Ballistic Missile Early Warning Systems, BMEWS). Ces capteurs utilisent des réseaux d'antennes phasées qui permettent de balayer rapidement une zone de l'espace. L'utilisation de tels réseaux est relativement souple puisque leur agilité permet de veiller sur une zone relativement large ou de pister plusieurs cibles de manière simultanée sans élément mécanique mobile.

Le système FPS-85 [12] est le premier radar à réseau phasé dédié à la surveillance de l'espace. Il est faiblement bistatique (zone d'émission et zone de réception côte-à-côte) et ses antennes sont montées sur une structure de 44 m de haut occupant une surface au sol de 23 226 m<sup>2</sup> (Figure 1.3).

Son emprise, ou Field of Regard (FOR), s'étend sur 120 ° en azimut et sur 105 ° en élévation et lui permet de détecter des objets sur des arcs de trajectoire très longs. Le FPS-85 aurait la capacité de détecter des objets d'une taille de 6 cm environ en orbite



basse (cette performance étant indicative compte tenu du fait qu'aucune valeur de référence de rapport signal à bruit n'y est associée, c'est-à-dire qu'on ne connaît pas les performances de détection et de fausse alarme) et de pister simultanément jusqu'à 200 objets présents dans son emprise.



**Figure 1.3** – Le FPS-85 est le premier radar à réseaux phasés dédié à la surveillance de l'espace. Il serait capable de détecter des objets d'un diamètre de 6 cm en orbite basse.

Le FPS-108, ou Cobra Dane [13], est un radar à réseau phasé conçu initialement pour la surveillance d'essais de tirs de missiles balistiques soviétiques. Il est monostatique (zone d'émission et zone de réception confondues) et permet la détection d'objets spatiaux de 4 ou 5 cm en orbite basse.

Depuis 2003, le Cobra Dane est connecté de manière permanente au SSN et maintient, en plus de sa mission principale anti-balistique, le balayage d'une zone du ciel large de  $60^\circ$  en azimut et de  $0.6^\circ$  en élévation afin d'apporter des détections supplémentaires [13]. La période de revisite de cette emprise n'est pas communiquée. Lors de tests précédents, le Cobra Dane a fourni environ 500 observations par jour correspondant à une centaine d'objets non catalogués en surveillant une zone dix fois plus large en élévation.



**Figure 1.4** – Le Cobra Dane est connecté de manière permanente au SSN depuis 2003, bien qu'il ait été conçu pour la surveillance d'essais de tirs de missiles balistiques soviétiques.

Le SSN américain permet au Commandement Stratégique américain (USSTRATCOM) de fournir un catalogue d'objets spatiaux de manière discrétionnaire (catalogue Space-Track et modèle dynamique SGP [14]). Ce catalogue contient en effet les paramètres orbitaux de plus de 20 000 objets de diamètre supérieur à 5 cm en orbite autour de la Terre [8]. Parmi eux, plus de 11 000 sont sur des orbites basses (altitude inférieure à 2000 Km).

### 1.3.2 Les systèmes européens

Certains pays européens ont développé des systèmes de surveillance de l'espace, tels que par exemple le radar imageur Tracking and Imaging Radar (TIRA). Cependant, le capteur français Grand Réseau Adapté à la Veille Spatiale (GRAVES), développé par l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA) et opéré par le Commandement de la Défense Aérienne et des Opérations Aériennes (CDAOA), constitue la capacité unique en Europe de cataloguer de nouveaux objets indépendamment du catalogue américain.

Le capteur français GRAVES est un radar bistatique à émission continue monofréquence et à détection Doppler [15]. Il est constitué de quatre panneaux équirépartis en azimut tous les 45° pour l'émission, et d'un réseau d'une centaine d'antennes omnidirectionnelles déployées à environ 400 Km du site d'émission (Figure 1.5). Chaque panneau génère un faisceau de 20° verticalement et de 8° horizontalement qui balaye 45° en azimut, l'ensemble des 4 panneaux produisant un balayage horizontal continu. Un traitement des signaux issus des antennes de réception permet un pavage de la zone éclairée par Formation de Faisceaux par le Calcul (FFC) afin de situer avec plus de précision les objets détectés. Par ailleurs, le très faible couplage entre l'émission et la réception permet l'utilisation de matériel moins avancé technologiquement et moins onéreux que dans des systèmes monostatiques ou quasi-monostatiques à performances égales en portée. En effet, les systèmes (quasi-) monostatiques à une émission pulsée nécessitent une puissance d'émission maximale plus élevée et sont fortement contraints technologiquement. En revanche, le radar du système GRAVES fournit des mesures d'angles et de vitesse radiale mais pas directement de mesure de distance.

## 1.4 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a permis dans un premier temps d'appuyer la nécessité de développer une capacité de surveillance spatiale. En effet, les systèmes spatiaux sont utilisés au cœur d'un grand nombre d'applications devenues indispensables. Ces systèmes doivent par conséquent être protégés des risques de collision avec les débris spatiaux. Par ailleurs, l'espace étant un domaine d'intérêt stratégique fort, une capacité de surveillance permet de se prémunir contre une utilisation potentiellement hostile de certains de ces systèmes.

Les systèmes existants pour la surveillance des orbites basses, à titre d'exemple le



**Figure 1.5** – Le site de réception du système GRAVES est composé d'un réseau d'une centaine d'antennes omnidirectionnelles. Un traitement des signaux issus des antennes de réception permet un pavage de la zone éclairée par Formation de Faisceaux par le Calcul (FFC).

FPS-85 et le Cobra Dane, sont en général composés de capteurs de taille colossale, l'effort ayant été porté sur la conception du capteur physique. Par opposition, GRAVES est un système prouvant qu'un traitement de données plus sophistiqué permet de modifier l'équilibre entre l'effort porté sur le capteur et l'effort porté sur le traitement.

Les travaux présentés dans cette thèse concernent le catalogage de petits objets en orbite basse. À partir des détections d'un capteur plus simple et moins complexe à mettre en œuvre que nous définissons au Chapitre 2, nous proposons des méthodes de traitement innovantes contribuant à l'apport d'une solution pour le catalogage de petits objets spatiaux. Nous montrons alors que l'utilisation d'algorithmes adaptés peut permettre l'exploitation de données issues d'un capteur physique moins complexe que les capteurs américains mentionnés pour atteindre des performances comparables.

# Chapitre 2

## Paramétrage d'un radar pour la détection de petits objets

Dans ce chapitre, nous choisissons une configuration particulière de radar monostatique à émission pulsée permettant la détection de petits objets grâce à un champ de veille réduit. Dans un premier temps, quelques notions fondamentales liées au fonctionnement d'un radar sont présentées. En particulier, la description de la chaîne de détection et de la mission permet d'introduire des notions de mesures disponibles et de performance de détection (probabilité de détection et taux de fausses alarmes). Ensuite, nous rappelons en quoi un compromis entre longueur d'onde émise et taille de l'emprise (champ de veille) peut permettre de faciliter la détection de petits objets. Enfin, nous adoptons un paramétrage de capteur pour la simulation de détections.

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Principe fondamental et définitions . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>2.2</b>	<b>Mode de balayage Track While Scan (TWS) . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>2.3</b>	<b>Émission pulsée versus émission continue . . . . .</b>	<b>14</b>
2.3.1	Cas du radar monostatique en émission pulsée . . . . .	14
2.3.2	Cas du radar bistatique en émission pulsée ou continue . . . . .	16
<b>2.4</b>	<b>Traitement du signal reçu . . . . .</b>	<b>16</b>
2.4.1	Chaîne de détection . . . . .	17
2.4.2	Non-détections et fausses alarmes . . . . .	17
<b>2.5</b>	<b>Influence de la fonction sur le choix de la longueur de l'onde émise . . . . .</b>	<b>20</b>
2.5.1	RSB en fonction des paramètres du radar et des cibles . . . . .	20
2.5.2	Influence du FOR $\Psi$ . . . . .	21
2.5.3	SER en fonction de la longueur de l'onde émise . . . . .	21
<b>2.6</b>	<b>Choix d'une configuration et d'un paramétrage de capteur envisageable . . . . .</b>	<b>23</b>
2.6.1	Choix d'une configuration monostatique pulsée . . . . .	23
2.6.2	Géométrie du champ de veille (Field Of Regard, FOR) . . . . .	24
2.6.3	Précision des mesures . . . . .	25
<b>2.7</b>	<b>Conclusion du chapitre . . . . .</b>	<b>25</b>

---

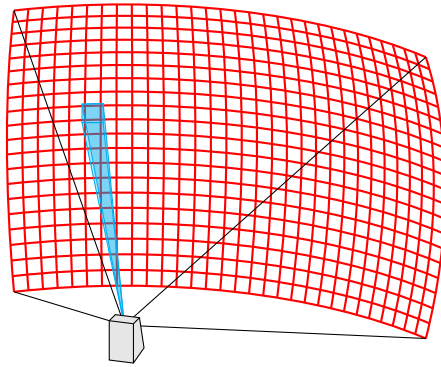
## 2.1 Principe fondamental et définitions

Le radar (RAdio Detection And Ranging) est un système qui permet de mesurer une ligne de visée et éventuellement une distance et/ou une fréquence Doppler associées à une cible en émettant une onde électromagnétique et en captant le signal réfléchi sur la cible [16, 17]. La Figure 2.1 schématise le trajet de l'onde émise dans le cas monostatique, *i.e.* l'émetteur et le récepteur sont confondus, et dans le cas bistatique, *i.e.* les positions de l'émetteur et du récepteur sont distinctes. Il existe également des systèmes multistatiques, *i.e.* comportant plusieurs sites d'émission et/ou de réception.



**Figure 2.1** – Trajet de l'onde émise entre la cible et la ou les antennes dans le cas monostatique (gauche), et le cas bistatique (droite).

Pour la surveillance, le faisceau formé par le capteur (Field Of View, FOV) pointe une zone de l'espace (Field Of Regard, FOR) selon un maillage en un temps limité. Le nombre de pointages nécessaires pour couvrir toute la zone dépend du rapport entre les volumes du FOR et du FOV, sachant que le nombre de pointages possible est limité par la puissance disponible, la distance aux cibles (la durée minimale d'un pointage est conditionnée par le temps de propagation aller-retour de l'onde émise) et la cadence de veille.

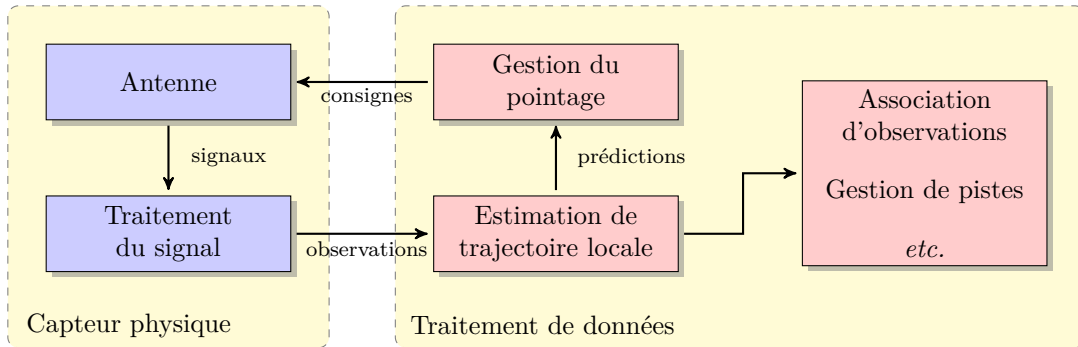


**Figure 2.2** – Field Of Regard (FOR) et Field Of View (FOV) schématisés dans le cas d'un radar de veille monostatique grand champ. Le FOV, représenté par un faisceau bleu, pointe successivement sur chacune des cases du FOR en un temps limité avec d'éventuels recouvrements.

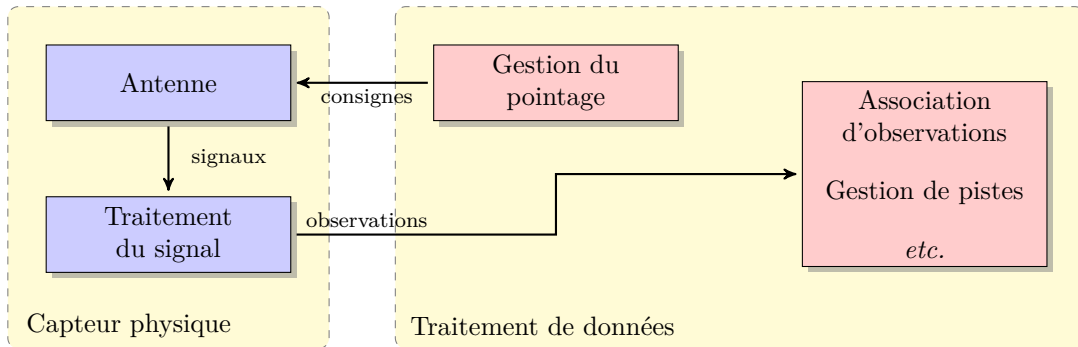
## 2.2 Mode de balayage Track While Scan (TWS)

Un système de veille radar comprend deux parties complémentaires : l'une concerne le capteur physique, l'autre concerne le traitement des données issues de ce capteur.

À l'interface entre ces deux aspects fondamentaux se trouvent les fonctions de gestion du pointage [18]. Pour assurer une mission de veille, un système radar oriente le FOV (faisceau) de manière à balayer la zone à surveiller en un temps limité. On distingue en particulier deux stratégies de balayage : le mode Track While Scan (TWS) dont GRAVES est un représentant utilise une routine de balayage fixe et n'alloue aucune ressource à la poursuite active (Figure 2.4) tandis qu'une variante de ce mode autorise la poursuite active, ou Active Tracking (AT), des objets nouvellement détectés (Figure 2.3) à l'instar du FPS-85. La Figure 2.5 illustre un parcours possible suivi par le FOV dans le cas TWS et dans le cas AT.

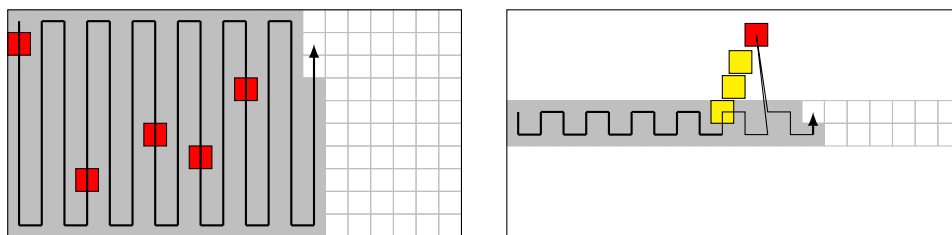


**Figure 2.3** – Diagramme de flux simplifié d'un système de veille radar avec poursuite active (Active Tracking, AT).



**Figure 2.4** – Diagramme de flux simplifié d'un système de veille radar sans poursuite active (Track While Scan).

Dans le cas avec AT, l'intégration de fonctions d'association d'observations et d'estimation de trajectoires locales requises dans une boucle de rétroaction augmente la complexité du système en comparaison à une chaîne simple, comme dans le cas TWS. En effet, la variante TWS n'est pas confrontée à des problèmes complexes liés à la gestion des ressources du capteur, en plus de la difficulté propre à l'implémentation de telles fonctions. Par exemple, générer un faisceau pour suivre un objet en particulier implique une allocation de temps au détriment de la période de balayage. Par conséquent, un fonctionnement AT implique en général une capacité maximale d'objets présents dans le FOR. Le mode de fonctionnement TWS n'ayant pas ce genre de contrainte, la routine de pointage qui y est associée est indépendante et donc relativement simple.



**Figure 2.5** – Parcours possibles du FOV dans un repère capteur dans le cas de la veille (gauche) en Track While Scan et dans un cas de la veille avec Active Tracking (droite). Chaque case correspond à une ligne de visée. Chaque case rouge correspond à une détection. Dans le cas de la veille avec Active Tracking (droite), chaque case jaune correspond à une détection antérieure.

## 2.3 Émission pulsée versus émission continue

Dans cette étude, nous faisons l’hypothèse d’un radar à émission pulsée. Nous donnons dans cette section les principaux éléments permettant de faire ce choix en décrivant les deux modes d’émission possibles.

Les radars à émission pulsée temporellement permettent de mesurer une durée de propagation entre l’émission d’une impulsion et sa réception. Le signal en question doit être d’autant plus large dans le domaine fréquentiel (afin que l’impulsion soit courte) que l’on souhaite avoir une bonne résolution en distance (*cf.* Section 2.3.1), ce qui nécessite une puissance d’émission maximale plus élevée avec des contraintes technologiques assez fortes sur les émetteurs et récepteurs, notamment en termes de synchronisation et de découplage. Par conséquent, son émission implique en général un système plus complexe, plus coûteux et plus susceptible de générer des difficultés à se voir allouer la bande nécessaire.

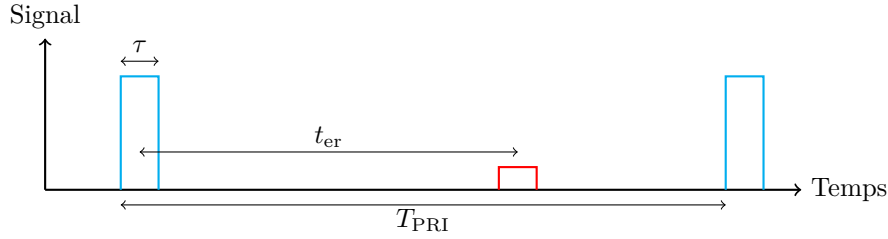
Par opposition, l’émission continue permet de restreindre l’émission à une bande fréquentielle étroite, mais pose des problèmes de couplage et d’isolation entre émission et réception. En général, une configuration multistatique est préférée dans le cas d’une émission continue, car la distance entre les sites d’émission et de réception permet de s’affranchir de ces contraintes.

Alors que l’émission pulsée permet naturellement une mesure de distance et éventuellement une mesure de vitesse radiale par le calcul, l’émission continue permet une mesure de vitesse radiale et un calcul d’accélération radiale. L’émission continue peut néanmoins fournir une mesure de distance par modulation du signal (modulation de fréquence, par exemple), ce qui implique un élargissement de la bande de fréquence émise.

### 2.3.1 Cas du radar monostatique en émission pulsée

Le principal intérêt d’un radar monostatique à émission pulsée est la possibilité de mesurer sa distance à la cible. Pour cela, une impulsion est émise avec une certaine Période de Répétition de l’Impulsion ( $T_{PRI}$ ) et l’on utilise la relation entre la distance

$R$  du capteur à la cible et la durée de propagation  $t_{er}$  des impulsions.



**Figure 2.6** – La durée de propagation  $t_{er}$  entre l'impulsion émise (puissance élevée) représentée en bleu et l'écho (puissance faible) représenté en rouge permet de calculer la distance  $R$  à la cible. En général, le radar n'émet pas pendant la période d'écoute ( $T_{PRI} - \tau$ ).

La distance  $R$  est alors obtenue pour chaque impulsion d'après équation (2.1) à  $\Delta R$  près, où  $c$  est la vitesse de la lumière et  $\tau$  est la largeur temporelle de l'impulsion.

$$R = \frac{ct_{er}}{2} \quad \Delta R = \frac{c\tau}{2} \quad (2.1)$$

Dans le cadre de la surveillance de l'espace, la distance  $R$  est en général de l'ordre de plusieurs milliers de kilomètres, ce qui implique une conception du capteur et du traitement des données particulière en comparaison à d'autres applications plus "courantes" telles que la surveillance aérienne où les cibles sont distantes de quelques dizaines de kilomètres seulement.

La vitesse radiale  $\dot{R}$  de la cible peut se mesurer à condition d'émettre plusieurs impulsions dans sa direction [16]. En effet, la vitesse radiale  $\dot{R}$  peut s'obtenir grâce au déphasage  $\Delta\Phi$  entre deux impulsions successives, par l'équation (2.2) où  $\lambda_e$  est la longueur de l'onde émise.

$$\dot{R} = \frac{\lambda_e \Delta\Phi}{4\pi T_{PRI}} \quad (2.2)$$

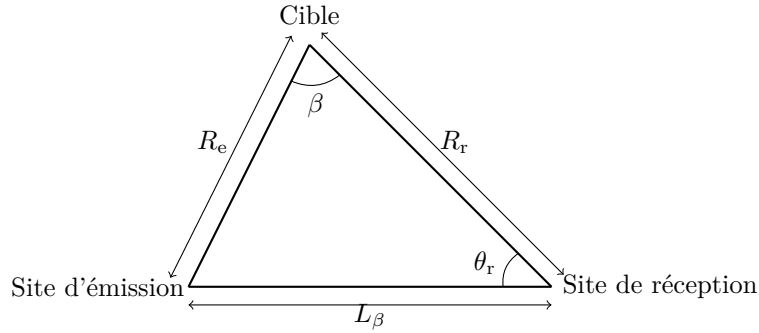
Le déphasage  $\Delta\Phi$  étant limité à un domaine de largeur  $2\pi$ , la vitesse radiale maximale mesurable sans ambiguïté vaut  $\dot{R}_{max} = \frac{\lambda_e}{2T_{PRI}}$ . De même, la portée maximale mesurable sans ambiguïté est de  $R_{max} = \frac{cT_{PRI}}{2}$ , ce qui implique de trouver un compromis entre distance maximale et vitesse radiale maximale des objets d'intérêt [16].

Dans le cadre de la veille, on envisage rarement d'envoyer suffisamment d'impulsions dans la même direction sur une même période de balayage pour mesurer une vitesse radiale avec précision. En effet, le nombre d'impulsions émises dans chaque direction est limité par la période de balayage et la puissance disponible, en plus d'une grande distance aux cibles.



### 2.3.2 Cas du radar bistatique en émission pulsée ou continue

On appelle radar bistatique un radar dont les antennes d'émission et de réception sont séparées d'une distance  $L_\beta$ . Il est possible d'utiliser une telle configuration avec une émission pulsée ou une émission continue. Dans le cas de l'émission pulsée, la relation entre la durée de propagation du signal et la distance parcourue est analogue au cas monostatique, comme le montre équation (2.3), où  $R_e$  est la distance entre l'antenne d'émission et la cible, et  $R_r$  la distance entre l'antenne de réception et la cible.



**Figure 2.7** – Le triangle bistatique est formé par les sites d'émission et de réception et la position de la cible.

$$R_e + R_r = c \times t_{er} \quad (2.3)$$

On peut alors exprimer la distance  $R_r$  en se plaçant dans le triangle bistatique (triangle formé par la position de la cible et des deux sites du capteur), tel qu'en équation (2.4), où  $L_\beta$  est la distance qui sépare le site d'émission du site de réception et  $\theta_r$  l'angle de visée de l'antenne de réception dans le triangle bistatique.

$$R_r = \frac{(R_r + R_e)^2 - L_\beta^2}{2(R_r + R_e + L_\beta \sin \theta_r)} \quad (2.4)$$

Dans le cas d'une émission continue, on peut mesurer la fréquence Doppler bistatique  $f_d$  et en déduire la vitesse  $\dot{R}_\beta$  par équation (2.5), où  $f_e$  est la fréquence d'émission et  $\dot{R}_\beta$  la vitesse de la cible projetée sur la bissectrice de l'angle bistatique  $\beta$  (angle émission-cible-réception), tel que défini sur la Figure 2.7.

$$f_d = \frac{2\dot{R}_\beta}{c} f_e \cos(\beta/2) \quad (2.5)$$

## 2.4 Traitement du signal reçu

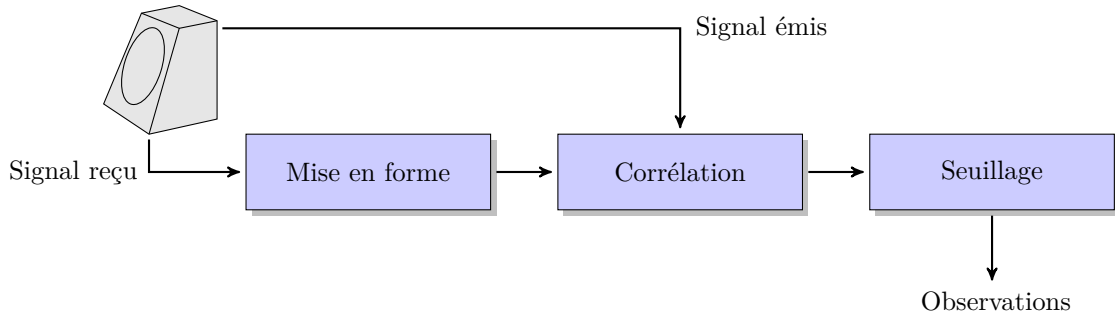
La puissance reçue étant atténuée d'un facteur proportionnel à  $\frac{1}{R^4}$  par rapport à la puissance émise, une chaîne de traitement est nécessaire afin de déterminer la

présence ou non de l'impulsion émise dans le signal reçu. La conception d'une telle chaîne de traitement requiert la définition du Rapport Signal à Bruit  $RSB$  (équation (2.6)), c'est-à-dire le rapport entre la puissance du signal  $P_r$  et la puissance du bruit  $P_{\Sigma_b}$ , utilisé comme critère de décision sur la présence d'une cible. La chaîne de traitement a pour but de maximiser le  $RSB$  à une distance de référence  $R_{\text{réf}}$ .

$$RSB = \frac{P_r}{P_{\Sigma_b}} \quad (2.6)$$

### 2.4.1 Chaîne de détection

Une chaîne de détection classique simplifiée comporte une étape de mise en forme du signal reçu (amplification, filtrage, *etc.*), une étape de corrélation et une étape de seuillage (décision) [16], comme l'illustre la Figure 2.8. Dans cette section, nous faisons l'hypothèse d'un radar monostatique à émission pulsée, le cas bistatique à émission continue étant analogue.

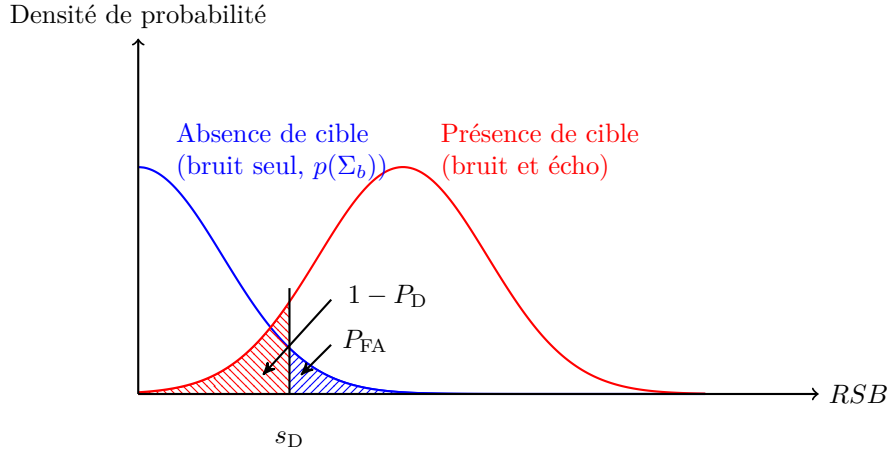


**Figure 2.8** – Chaîne de détection classique d'un radar (émission pulsée) à corrélation.

Pour maximiser le rapport signal à bruit  $RSB$  en sortie d'un bloc de mise en forme, on peut construire un filtre optimal au sens de la maximisation du  $RSB$  par corrélation (*cf.* Annexe A).

### 2.4.2 Non-détections et fausses alarmes

Afin de décider de la détection ou non d'une cible, un seuil de détection  $s_D$  doit être défini par rapport au  $RSB$ . Cela implique un taux de fausses alarmes non-nul et une probabilité de non-détection non-unitaire, *i.e.* le niveau d'un signal dû au bruit seul peut franchir le seuil de détection, tandis qu'un écho trop faible peut ne pas le franchir. Par conséquent, les performances de détection d'un radar se définissent principalement par la probabilité de détection  $P_D$  et la probabilité de fausse alarme  $P_{FA}$  [16].



**Figure 2.9** – Densités de probabilité du  $RSB$  selon la présence ou l'absence de cible. La définition d'un seuil implique une probabilité de détection  $P_D$  non-unitaire et une probabilité de fausse alarme  $P_{FA}$  non-nulle.

### Expression de la probabilité de fausse alarme

La probabilité de fausse alarme [16, 17] représente la probabilité que le système délivre une détection due non pas à la présence d'un objet dans le FOV mais au bruit. Si  $b$  est le signal aléatoire lié au bruit et normalisé par la puissance  $P_b$  du bruit, alors la densité du signal  $b$  en sortie du détecteur est donnée par équation (2.7), et équation (2.8) exprime la densité de la somme  $\Sigma_b$  de  $n$  réalisations  $b_i$  du signal  $b$ .

$$p(b) = e^{-b/P_b} \quad (2.7)$$

$$p(\Sigma_b) = \frac{\Sigma_b^{n-1} e^{-\Sigma_b}}{(n-1)!} \quad (2.8)$$

La probabilité de fausse alarme  $P_{FA}$  s'exprime alors tel que :

$$P_{FA} = \int_{s_D}^{\infty} p(\Sigma_b) d\Sigma_b = \int_{s_D}^{\infty} \frac{\Sigma_b^{n-1} e^{-\Sigma_b}}{(n-1)!} d\Sigma_b \quad (2.9)$$

La valeur du seuil de détection  $s_D$  adéquate se déduit d'une valeur de  $P_{FA}$  spécifiée par la mission ou par les limites du traitement de données aval. En général,  $P_{FA}$  se déduit d'un taux de fausses alarmes voulu (par exemple, 1FA/s) et du nombre de tests à réaliser.

### Expressions de la probabilité de détection

Pour calculer la probabilité de détection  $P_D$ , il est nécessaire de faire une hypothèse de modèle de réflexion, c'est-à-dire sur la manière dont l'onde est réfléchi par l'objet. Cette réflexion est caractérisée par la Surface Équivalente Radar (SER) désignée par

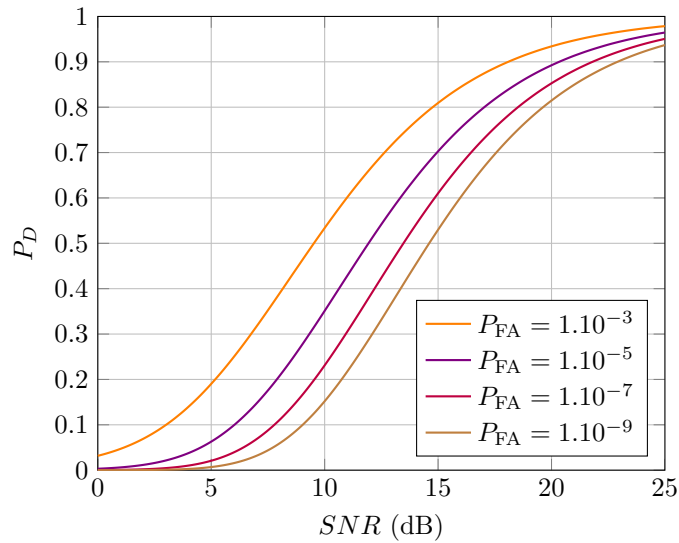
$\sigma$ , qui correspond à la surface reflétant l'onde émise vers un récepteur. En général, on choisit un des quatre modèles de Swerling [19, 16], chaque modèle correspondant à un type de réflexion, c'est-à-dire à des propriétés statistiques des objets observés :

- Swerling I décrit une rétro-diffusion constante sur  $n$  récurrences mais variable d'un balayage à l'autre.
- Swerling II est analogue à Swerling I, les réalisations de  $\sigma$  étant indépendantes d'une récurrence à l'autre.
- Swerling III correspond à plusieurs zones de réflexion disjointes, constantes sur  $n$  récurrences mais variable d'un balayage à l'autre.
- Swerling IV est analogue à Swerling III, les réalisations des  $\sigma$  étant indépendantes d'une impulsion à l'autre.

Le choix du modèle de réflexion (densité de la SER  $\sigma$ ) conditionne l'expression de la probabilité de détection  $P_D$ . Par exemple, équation (2.10) exprime  $P_D$  sous l'hypothèse d'un modèle Swerling I pour une unique impulsion ( $n = 1$ ).

$$P_{D, \text{Swerling I}} = P_{\text{FA}}^{\left(\frac{1}{1+RSB}\right)} \quad (2.10)$$

Sachant une valeur de  $P_{\text{FA}}$  on cherche à atteindre une valeur de  $RSB$  telle que  $P_D$  est le plus haut possible. À titre d'exemple, la Figure 2.10 montre qu'il faut atteindre un  $RSB$  de l'ordre de 20 dB (pour une distance de référence  $R_{\text{réf}}$ ) pour une  $P_{\text{FA}}$  de  $10^{-5}$ , si l'on souhaite obtenir une valeur de  $P_D$  proche de 0,9 dans le cas d'un modèle de Swerling I pour une unique impulsion.



**Figure 2.10** –  $P_D$  en fonction de  $RSB$  pour quatre valeurs de  $P_{\text{FA}}$  selon un modèle de Swerling I pour une unique impulsion.

## 2.5 Influence de la fonction sur le choix de la longueur de l'onde émise

Il s'agit maintenant d'identifier l'influence de la longueur de l'onde émise sur le  $RSB$  selon la fonction à remplir. Celle-ci dépend des paramètres du radar, des cibles et du milieu de propagation.

### 2.5.1 RSB en fonction des paramètres du radar et des cibles

L'équation de propagation du radar (équation (2.11)) permet d'exprimer le  $RSB$  dans le cas de l'émission d'une seule impulsion tel qu'en équation (2.12) (on obtient une expression analogue dans le cas continu), où  $P_r$  est la puissance du signal reçu,  $P$  est la puissance fournie,  $G_e$  et  $G_r$  sont les gains des antennes d'émission et de réception, respectivement,  $\lambda_e$  est la longueur de l'onde émise,  $\sigma(f_e)$  est la Surface Équivalente Radar (SER),  $R$  est la distance entre la cible et l'antenne d'émission ou de réception,  $L$  les pertes ou gains liés au parcours de l'onde (pertes atmosphériques, gain dû aux réflexions multiples, *etc.*) ou liées au système (pertes de traitement, *etc.*) et la quantité  $P_{\Sigma_b} = kT\Delta F$  représente la puissance du bruit avec  $k$  la constante de Boltzmann,  $T$  la température équivalente de bruit thermique,  $\Delta F$  la largeur de bande après filtrage.

$$P_r = \frac{PG_e G_r \lambda_e^2 \sigma(f_e)}{(4\pi)^3 R^4 L} \quad (2.11)$$

$$RSB = \frac{P_r}{P_{\Sigma_b}} = \frac{PG_t G_r \lambda_e^2 \sigma(f_e)}{(4\pi)^3 R^4 L P_{\Sigma_b}} \quad (2.12)$$

Une augmentation de fréquence d'émission pénalise fortement le  $RSB$  du fait d'un facteur  $\lambda_e^2$  au numérateur. Une augmentation de cette fréquence doit alors être compensée, par exemple par une augmentation de la puissance d'émission, afin de maintenir les performances en détection ( $P_D$  et  $P_{FA}$ ). Dans le cadre de la veille, une augmentation en fréquence peut être compensée de manière équivalente par une réduction du champ de veille. C'est ce facteur d'échange que nous utilisons afin de maintenir une puissance totale émise limitée tout en jouant sur la dépendance en  $f_e$  de la SER  $\sigma(f_e)$ .

Par ailleurs, une intégration cohérente sur  $n$  impulsions améliore le  $RSB$  d'un facteur  $n$  au prix d'une durée de pointage  $t_p = nT_{PRI}$  [16, 17], ce qui justifie l'intérêt d'envoyer plusieurs impulsions dans chaque direction si le temps imparti le permet. Cependant, seulement une ou deux récurrences sont effectuées dans le cas de la surveillance de l'espace en général, du fait d'un budget temps limité et de la durée de propagation relativement longue.

### 2.5.2 Influence du FOR $\Psi$

Le bilan en veille, obtenu à partir de l'équation (2.12) en exprimant notamment les gains  $G_e$  et  $G_r$  en fonction des surfaces des antennes et de la longueur d'onde, peut s'exprimer selon l'équation (2.13) où  $dP_e$  est la densité surfacique de puissance émise,  $S_t$  la surface d'émission,  $S_r$  la surface de réception,  $\eta$  la charge de poursuite (dans le cas Active Tracking),  $\beta$  le recouvrement des faisceaux en veille,  $\Psi$  le FOR et  $t_v$  la période de revisite.

Cette équation met en évidence que le  $RSB$  ne dépend pas directement de la fréquence d'émission (il en dépend cependant par l'intermédiaire de  $\sigma$ ), et qu'il est limité par un FOR  $\Psi$  le plus grand possible et par une période de balayage  $t_v$  la plus petite possible. Le nombre de pointages nécessaires pour couvrir l'intégralité du FOR  $\Psi$  est donné par équation (2.14).

$$RSB_{veille} = \frac{dP_e S_e S_r \sigma(f_e)}{4\pi R^4 L P_{\Sigma_b}} \times \frac{(1 - \eta)\beta t_v}{\Psi} \quad (2.13)$$

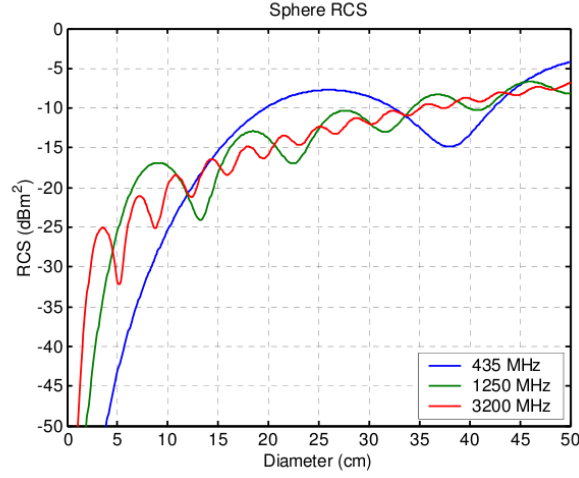
$$N = \frac{S_e \Psi}{\beta \lambda_e^2} \quad (2.14)$$

Dans le cadre d'une fonction de veille, le choix de la longueur d'onde  $\lambda_e$  conditionne le nombre de pointages nécessaires (car  $\lambda_e$  influence la taille du FOV) mais également l'ordre de grandeur de la SER  $\sigma$ , comme nous le voyons plus en détails dans la Section 2.5.3. Une variation de la longueur d'onde  $\lambda_e$  peut alors être compensée par une variation du volume de surveillance  $\Psi$  afin de maintenir le nombre de pointages nécessaires à une valeur acceptable (et donc la puissance totale nécessaire au balayage).

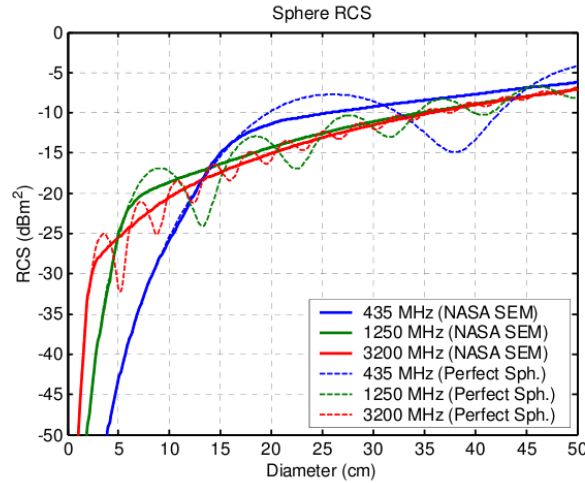
### 2.5.3 SER en fonction de la longueur de l'onde émise

La SER d'un objet dépend de nombreux facteurs, notamment de sa taille, de sa forme, de son attitude, de son matériau mais également de la longueur de l'onde qui l'éclaire. En effet, des considérations simplificatrices d'électromagnétisme [20, 19] permettent de tracer les courbes présentées en Figure 2.11 dans le cas d'une sphère. Pour les objets de diamètre inférieur à 10 cm, il apparaît que le choix d'une fréquence d'émission de 1250 MHz devrait permettre d'obtenir une SER supérieure à celle que l'on obtiendrait en utilisant une fréquence d'émission de 435 MHz.

Des travaux menées par la NASA fourniraient une relation entre la taille d'un objet, sa SER et la fréquence d'émission sous une hypothèse de sphéricité. Les SER d'un échantillon représentatif de petits débris ont été mesurées pour différentes attitudes, à différentes fréquences d'émission. Des modèles expérimentaux ont alors été recalés et une interpolation des mesures fournit les courbes présentées en Figure 2.12, où le diamètre efficace est la moyenne de trois épaisseurs d'un objet mesurées dans trois directions orthogonales [21].



**Figure 2.11** – Surface Équivalente Radar théorique en fonction du diamètre d'une sphère parfaite, aux fréquences 435 MHz, 1250 MHz et 3200 MHz.



**Figure 2.12** – Surface Équivalente Radar empirique lissée en fonction du diamètre efficace d'objets représentatifs, aux fréquences 435 MHz, 1250 MHz et 3200 MHz.

Ces expériences soutiennent l'hypothèse selon laquelle la SER d'une cible est fonction entre autres de son diamètre et de la fréquence de l'onde qui l'éclaire. Augmenter la fréquence d'émission conduit donc à diminuer le diamètre minimal des objets détectables à bilan égal.

Cette augmentation de fréquence implique cependant une augmentation du nombre de pointages nécessaires (équation (2.14)). Sous une contrainte de période de balayage  $t_v$  et de FOR  $\Psi$  fixes, davantage de puissance est alors nécessaire. Ce sur-coût peut cependant être compensé par exemple en réduisant la taille du FOR  $\Psi$ . En revanche, le nombre d'observations à chaque passage d'un objet dans leur FOR ainsi la fréquence de passage sont fortement réduits, ce qui rend plus difficile le traitement de données.

## 2.6 Choix d'une configuration et d'un paramétrage de capteur envisageable

Les performances du capteur physique sont contraintes par, entre autres, le type et la taille de ou des antennes, la puissance d'émission, la fréquence et la bande d'émission. La plupart des radars de surveillance spatiale américains sont le résultat d'efforts particuliers. En effet, c'est au prix de capteurs de grande taille comme le FPS-85 et Cobra Dane, que le SSN américain est capable de détecter et de suivre des objets relativement petits (de diamètre supérieur à 4 ou 5 cm). En revanche, le système français GRAVES adopte une stratégie différente du fait de spécifications et de contraintes différentes : le capteur physique, bistatique et à bande étroite, est comparativement de faible coût mais fournit des mesures de vitesse radiale (Doppler pour GRAVES *vs* distance pour le FPS-85 et Cobra Dane) dont sont déduites des positions sous la contrainte d'un nombre d'observations disponibles minimal.

Nous choisissons d'adopter un mode de balayage Track-While-Scan (TWS) car cette stratégie est la plus simple d'un point de vue "système" (sans bouclage) (Figure 2.4). Les observations issues du capteur physique sont alors acheminées vers un centre de traitement de données dont le rôle est d'associer les observations entre elles et d'en déduire les orbites des objets détectés. Cela fait intervenir principalement des techniques de pistage multicible et d'orbitographie, dont les performances dépendent des moyens investis sur le capteur physique et de la nature des cibles. En effet, les performances en détection (détections et fausses alarmes), la précision des mesures, le nombre d'observations par traversée du champ de veille, la fréquence de traversée du champ de veille, *etc.*, ont un impact fort sur les performances de l'algorithme de pistage.

### 2.6.1 Choix d'une configuration monostatique pulsée

Nous faisons l'hypothèse de l'utilisation d'un radar monostatique à émission pulsée dans la suite de ce document.

En effet, une observation délivrée par un radar à émission pulsée, *i.e.* deux angles et une distance, est une information riche car chaque observation fournit directement une connaissance de la position de l'objet contrainte sur les trois dimensions. Une mesure précise de vitesse radiale est difficile à envisager en complément d'une mesure de distance dans le cas d'un radar à émission pulsée pour la surveillance de l'espace, du fait d'un budget de temps limité et de la grande portée requise. En effet, d'une part le volume à surveiller (Field Of Regard, FOR) est très grand et doit être parcouru à une cadence assez rapide pour éviter que des objets y passent sans être détectés, si bien que très peu d'impulsions sont envoyées dans chaque direction et que, par conséquent, un calcul de vitesse radiale, s'il est possible, serait de faible précision. D'autre part, la nécessité d'une grande portée impose le choix d'une Période de Répétition de l'Impulsion ( $T_{PRI}$ ) élevée, si bien que la vitesse radiale maximale admise sans ambiguïté serait trop faible pour s'appliquer aux objets en orbite basse. Par conséquent, nous considérons qu'un radar à émission pulsée fournit une mesure



de distance en plus de deux angles, mais pas de mesure de vitesse radiale.

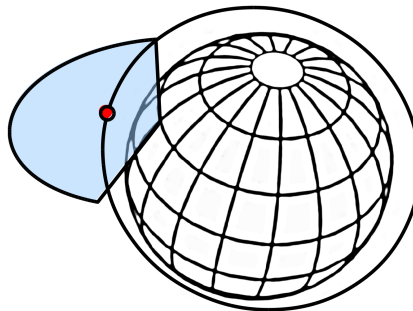
Par opposition, l'information fournie lors d'une unique observation par un radar à émission continue, *i.e.* deux angles et une vitesse radiale, est une information moins riche. En effet, la mesure de deux angles permet de contraindre la position possible de l'objet à une ligne de visée, tandis que la mesure de vitesse radiale n'est qu'une projection de la vitesse sur cette ligne de visée. Ni la position, ni la vitesse ne sont donc connues intégralement. Dans le cadre de la surveillance de l'espace, plusieurs observations successives de cette nature sont nécessaires afin de compléter la connaissance des positions de l'objet utiles à l'estimation d'orbite, ce qui impose des contraintes sur l'étendue du FOR.

Sachant qu'un radar bistatique est potentiellement d'un moindre coût, adopter une configuration monostatique pulsée représente une hypothèse relativement forte mais permet dans un premier temps de développer des techniques plus intuitives, tout en gardant à l'esprit que ces techniques devront être adaptées à d'autres types de systèmes, si nécessaire.

### 2.6.2 Géométrie du champ de veille (Field Of Regard, FOR)

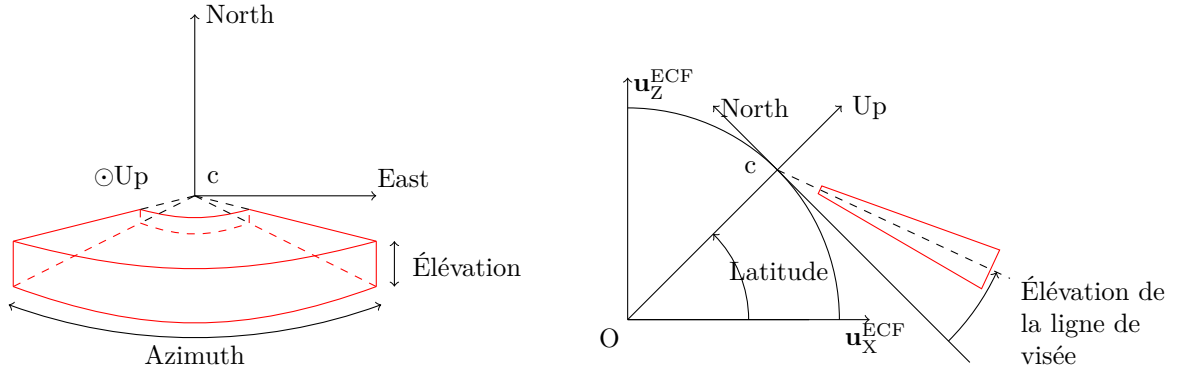
La détection d'objets plus petits par l'augmentation de la fréquence d'émission impose une diminution de la taille du FOR à faisabilité équivalente, comme mentionné en Section 2.5.2. Par conséquent, on cherche à surveiller une zone de l'espace la plus petite possible tout en permettant au plus grand nombre d'objets possible de se trouver régulièrement dans le FOR et en interdisant la non-détection d'un objet lors d'une traversée due à une cadence de revisite trop faible vis-à-vis d'une étroitesse du FOR.

Les objets en orbite basse ayant des orbites en général fortement inclinées (*cf.* Chapitre 3), nous choisissons un FOR orienté vers le plan équatorial, large de  $160^\circ$  en azimut, afin de permettre la détection régulière d'un grand nombre d'objets, et large de  $2^\circ$  en élévation, ce qui traduit la réduction du FOR recherchée. Nous positionnons arbitrairement le capteur à une latitude de  $45^\circ$  N. Sa ligne de visée est orientée vers le Sud avec une élévation arbitraire de  $20^\circ$  par rapport à l'horizon.



**Figure 2.13** – Schéma représentant la zone de l'espace surveillée (bleue) ainsi qu'une observation (rouge) issue d'un objet dont l'orbite (très inclinée) est représentée.

Sachant que la vitesse d'un objet en orbite à une altitude constante de 150 Km est



**Figure 2.14** – Forme et orientation du FOR dans un référentiel East-North-Up (*cf.* Chapitre 3)

de l'ordre de 8 Km/s, le FOR ainsi défini doit être revisité à une période de l'ordre de 10 s pour qu'aucun objet ne puisse le traverser sans être observé au moins une fois. Par ailleurs, compte tenu du volume de surveillance, on estime qu'un taux de fausses alarmes de 1 FA/s est une hypothèse raisonnable, ce qui induit en moyenne 10 FA/Scan.

### 2.6.3 Précision des mesures

Si l'on choisit de se placer à une fréquence d'émission  $f_e$  plus élevée (par exemple  $f_e = 1$  GHz), la Surface Équivalente Radar (SER) des objets plus petits augmente (Figure 2.12). Sachant la densité moyenne d'objets présents dans le FOR, et la géométrie de ce dernier, il faut atteindre une portée maximale de 4000 Km et l'on considère qu'une précision de mesure radiale  $\sigma_\rho$  de 30 m et une précision de mesure angulaire  $\sigma_\theta$  de  $0,2^\circ$  sont suffisantes et atteignables (par exemple, le Cobra Dane fournit des mesures avec une précision de 3 m et de  $0,05^\circ$  à 1-sigma [13]). On peut calculer les ordres de grandeur de certains paramètres dimensionnants ( $\Delta F$  et  $l$ ) liés à la précision de mesure grâce à l'équation (2.15) et l'équation (2.16), où  $c$  est la vitesse de la lumière (m/s),  $\Delta F$  la largeur de bande émise (Hz),  $\lambda$  la longueur de l'onde émise (m) et  $l$  la largeur de l'antenne (m).

$$\sigma_\rho \simeq \frac{c}{5\Delta F\sqrt{2RSB}} \Big|_m \quad (2.15)$$

$$\sigma_\theta \simeq \frac{50\lambda_e}{1,2l\sqrt{RSB}} \Big|_{deg} \quad (2.16)$$

## 2.7 Conclusion du chapitre

Réduire la taille du FOR peut être une manière de faciliter la détection des objets plus petits tout en permettant le maintien d'une puissance totale émise limitée dans un contexte de veille à haute fréquence. Ainsi, nous avons exposé les hypothèses de travail que constituent les caractéristiques, notées  $\Theta$ , de capteur choisies :

- Configuration monostatique pulsée,
- Situé à  $45^\circ$  N, ligne de visée orientée vers le Sud avec une élévation de  $20^\circ$ ,
- FOR de  $160^\circ \times 2^\circ$ , période de revisite de 10 s,
- Mesure de position  $(\rho, \theta, \phi)$  avec des précisions de  $\sigma_\rho = 30$  m et  $\sigma_\theta = \sigma_\phi = 0,2^\circ$ ,
- Probabilité de détection moyenne  $P_D = 0,9$  et taux de fausse alarme de 1 FA/s pour un bilan et une distance de référence.

À partir de ce paramétrage  $\Theta$  de capteur permettant la détection de petits objets, nous développons des algorithmes pour le catalogage permettant d'exploiter au mieux les données générées. Cette hypothèse de capteur permet également d'évaluer les algorithmes développés dans cette thèse avec un certain degré de réalisme, bien que certaines hypothèses simplificatrices soient adoptées (par exemple, la précision de mesure angulaire est gardée constante alors que ce paramètre est variable selon le RSB et l'angle d'observation pour les capteurs à réseau d'antennes phasées), et nous supposons les probabilités de détection constantes et égales à une valeur moyenne  $P_D$ .

# Chapitre 3

## Modèles dynamiques et satellites en orbite basse

Dans ce chapitre, deux modèles paramétriques usuels pour l'orbitographie sont présentés : le modèle képlérien simple, qui permet de visualiser facilement le mouvement des objets en orbite, et le modèle Simplified General Perturbations (SGP), qui permet une meilleure précision pour la simulation de trajectoires en orbite basse ainsi qu'une utilisation cohérente des données publiques du catalogue Space-Track. Ces modèles simples sont adaptés aux problématiques traitées dans cette thèse, tant en précision qu'en puissance de calcul nécessaire. Pour présenter ces modèles, quelques systèmes de coordonnées classiques sont rappelés dans un premier temps. Les équations du modèle képlérien de base ou avec  $J_2$  sont ensuite brièvement décrites, et le modèle SGP ainsi que le catalogue Space-Track sont présentés d'un point de vue pratique (sans la lourdeur des équations). Enfin, les répartitions des objets en orbite basse sur certains paramètres orbitaux sont présentées afin de cerner les particularités de la population d'objets que nous cherchons à cataloguer.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Systèmes de coordonnées usuels</b>	<b>28</b>
3.1.1	Référentiels géocentriques inertiel (ECI) et fixe (ECF)	28
3.1.2	Référentiel Géodésique	28
<b>3.2</b>	<b>Potentiel terrestre</b>	<b>29</b>
<b>3.3</b>	<b>Le modèle képlérien</b>	<b>30</b>
3.3.1	Modèle simple	30
3.3.2	Dérive des paramètres orbitaux	32
<b>3.4</b>	<b>Le modèle SGP</b>	<b>33</b>
3.4.1	Modélisation du potentiel terrestre	33
3.4.2	Modélisation paramétrique de la traînée atmosphérique	34
<b>3.5</b>	<b>Le catalogue Space-Track</b>	<b>34</b>
3.5.1	Format des éléments	34
3.5.2	Distribution des paramètres orbitaux	35
<b>3.6</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>36</b>

---

## 3.1 Systèmes de coordonnées usuels

Décrire une trajectoire nécessite la définition de référentiels. En effet, la trajectoire d'un satellite peut être représentée au premier ordre par une ellipse dans un référentiel géocentrique inertiel tandis que la même trajectoire dans un référentiel géocentrique fixe fait apparaître une intertrace (un satellite ne survole pas la même zone d'une révolution à l'autre). De même, il peut être utile de caractériser dans un référentiel géodésique certains points particuliers de la trajectoire, comme par exemple la position du satellite à un instant  $t$  ou encore la latitude maximale survolée.

### 3.1.1 Référentiels géocentriques inertiel (ECI) et fixe (ECF)

Un système de coordonnées classique et intuitif pour représenter les orbites est le référentiel Géocentrique Inertiel (ECI) à coordonnées cartésiennes ou polaires [22]. Son repère, orthogonal, est centré sur le centre de masse de la Terre et deux de ses axes sont dans le plan équatorial, le troisième axe étant l'axe polaire. Ces axes pointent vers des étoiles lointaines, ce qui rend leurs directions fixes dans l'espace de l'univers physique. La Terre est en rotation par rapport à ce repère.

Le repère du référentiel Géocentrique Fixe (ECF)  $\mathbf{R}_{\text{ECF}}$  est solidaire de la rotation de la Terre. Il est le résultat de la rotation du repère ECI  $\mathbf{R}_{\text{ECI}}$  d'un angle  $\theta_{\text{sidéral}} = \omega_{\text{sidéral}} \Delta t$  autour de l'axe polaire, où  $\omega_{\text{sidéral}}$  est la vitesse de rotation angulaire propre de la Terre dans un repère ECI et  $\Delta t$  est le temps écoulé depuis une date de référence. L'équation (3.1), où  $\mathbf{R}_{\text{ECF}}$ , resp.  $\mathbf{R}_{\text{ECI}}$ , définit la matrice des vecteur du repère d'un référentiel ECF, resp. ECI, et  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_Z}(\theta_{\text{sidéral}})$  représente la matrice de rotation d'angle  $\theta_{\text{sidéral}}$  autour de l'axe polaire  $\mathbf{u}_Z$ .

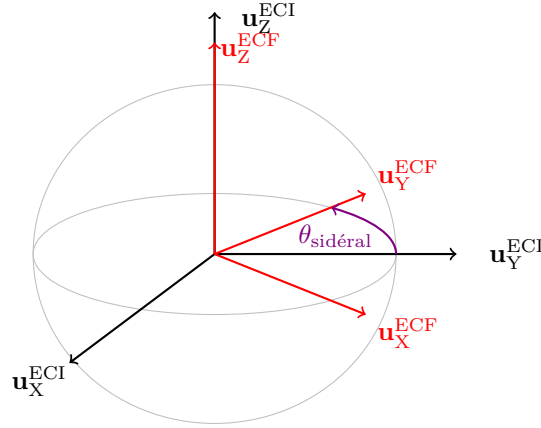
$$\mathbf{R}_{\text{ECF}} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}_Z}(\theta_{\text{sidéral}}) \mathbf{R}_{\text{ECI}} \quad (3.1)$$

Nous négligeons ici les phénomènes de précession et de nutation (rotations de l'axe de rotation de la Terre autour d'axes proches), ces phénomènes n'ayant une influence significative que sur des échelles de temps supérieures à celle des scénarios traités dans cette thèse (quelques jours).

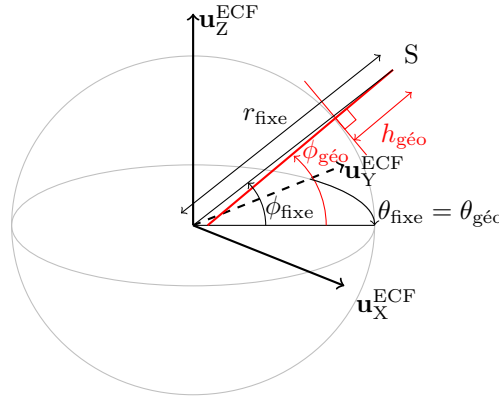
### 3.1.2 Référentiel Géodésique

Le système de coordonnées géodésiques est également très répandu. Il utilise un axe orthogonal à un plan tangent passant par un point de la surface du globe pour définir l'altitude  $h_{\text{géo}}$  par rapport à la surface de la Terre ainsi que la latitude  $\phi_{\text{géo}}$  et la longitude  $\theta_{\text{géo}}$ , comme le décrit la Figure 3.2.

Le repère local est un repère simple pour situer une observation par rapport au capteur associé. Le repère local considéré dans cette étude est centré sur le capteur avec un premier axe dans la direction de l'Est, un second axe dans la direction du Nord et un troisième axe vertical (repère East-North-Up). Pour passer de ce



**Figure 3.1** – Le repère Géocentrique Fixe (ECF)  $\mathbf{R}_{\text{ECF}}$  est le résultat de la rotation du repère ECI  $\mathbf{R}_{\text{ECI}}$  d'un angle  $\theta_{\text{sidéral}}$ .



**Figure 3.2** – Le système de coordonnées géodésiques utilise un axe orthogonal à un plan tangent passant par un point de la surface du globe pour définir l'altitude  $h_{\text{géo}}$  ainsi que la latitude  $\phi_{\text{géo}}$ .

repère à un repère ECF, on peut utiliser la composition de rotations définie par l'équation (3.2), où  $\mathbf{R}_{\text{ENU}}$  est la matrice des vecteur du repère d'un référentiel local et  $\mathbf{r}_{\text{site}}$  est le vecteur des coordonnées de l'origine du repère local.

$$\mathbf{R}_{\text{ECF}} = \left( -\theta_{\text{géo}} \right) \mathbf{R}_{\mathbf{u}_Y} \left( \frac{\pi}{2} - \phi_{\text{géo}} \right) \mathbf{R}_{\mathbf{u}_Z} \left( \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{R}_{\text{ENU}} + \mathbf{r}_{\text{site}} \quad (3.2)$$

Les équations de passage entre le repère géodésique et le repère ECF sont données en Annexe B.

## 3.2 Potentiel terrestre

L'attraction gravitationnelle permet la mise en orbite de satellites. Elle joue un rôle fondamental dans les modèles décrits par la suite. La loi de Newton exprime la force résultante  $\mathbf{f}_{\text{TS}}$  de l'attraction gravitationnelle entre deux masses ponctuelles T (par exemple la Terre) et S (par exemple un satellite), distantes de  $\mathbf{d}_{\text{TS}}$  par

l'équation (3.3), où  $K$  est la constante gravitationnelle universelle.

$$\mathbf{f}_{TS} = -\frac{Km_T m_S}{\|\mathbf{d}_{TS}\|^2} \times \frac{\mathbf{d}_{TS}}{\|\mathbf{d}_{TS}\|} \quad (3.3)$$

On définit le potentiel gravitationnel  $U_T(S)$  de T pour tout point S par l'équation (3.4).

$$\mathbf{f}_{TS} = \mathbf{grad}_S(U_T(S)) \quad (3.4)$$

où dans le cas ponctuel,  $U_T(S)$  s'exprime par l'équation (3.5).

$$U_T(S) = \frac{Km_T}{\|\mathbf{d}_{TS}\|} \quad (3.5)$$

La masse de la Terre est répartie sur son volume. On peut développer l'expression du potentiel terrestre  $U(r, \phi_{\text{géo}})$  selon l'équation (3.6) [23], où  $\mu = Km_T$  est le paramètre gravitationnel terrestre standard,  $r_{\text{eq}}$  le rayon terrestre équatorial,  $r$  et  $\phi_{\text{géo}}$  sont respectivement la distance au centre et la latitude considérées,  $J_n$  est le coefficient harmonique zonal d'ordre  $n$  et  $P_n$  est le polynôme de Lagrange d'ordre  $n$ .

$$U_T(r, \phi_{\text{géo}}) = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{r_{\text{eq}}}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \phi_{\text{géo}}) \right] \quad (3.6)$$

À partir de l'expression (3.6), nous décrivons les modèles képlérien simple, képlérien avec  $J_2$  et SGP.

## 3.3 Le modèle képlérien

### 3.3.1 Modèle simple

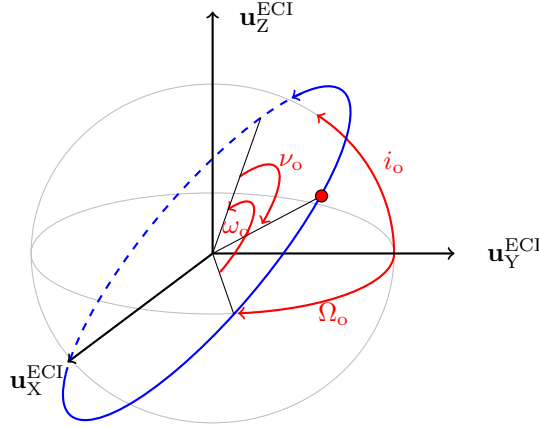
Le modèle képlérien simple ne considère que le premier terme du potentiel terrestre :

$$U_{T, \text{Kép.}}(r, \phi_{\text{géo}}) = \frac{\mu}{r} \quad (3.7)$$

#### Paramétrage classique

Le modèle képlérien de base permet de décrire une orbite par une ellipse dans un référentiel ECI. Selon ce modèle, une orbite est représentée par sept paramètres (dont un paramètre indiquant la position du satellite sur l'ellipse). Le jeu de paramètres képlériens le plus classique comprend un paramètre de datation ( $t_o$ ), deux paramètres de dimensions ( $a_o$ ,  $e_o$ ), trois paramètres d'orientation ( $i_o$ ,  $\Omega_o$ ,  $\omega_o$ ) et un paramètre de position ( $\nu_o$ ) :

- date associée à l'orbite  $t_o$  (s),
- demi grand axe  $a_o$  (m),
- excentricité  $e_o$  (sans unité),
- inclinaison du plan orbital sur l'équateur  $i_o$  (°),
- longitude du noeud ascendant  $\Omega_o$  (°),
- argument du périégée  $\omega_o$  (°),
- anomalie vraie  $\nu_o$  (°), c'est-à-dire l'angle entre la position du satellite et un axe de référence.



**Figure 3.3** – Le jeu de paramètres képlériens le plus classique comprend trois paramètres d'orientation ( $i_o$ ,  $\Omega_o$ ,  $\omega_o$ ) et un paramètre de position ( $\nu_o$ ).

Le paramètre de datation  $t_o$  permet de dater la position du satellite décrite par l'anomalie  $\nu_o$ . De même, d'autres paramètres orbitaux peuvent varier sous l'effet de perturbations (moments supplémentaires du potentiel  $U_T$ , traînée atmosphérique, *etc.*), ce qui impose de dater leurs valeurs.

### Paramètres alternatifs ou intermédiaires de calcul

Dans la littérature [24, 25], plusieurs notions d'anomalies sont couramment utilisées : l'anomalie vraie  $\nu_o$ , l'anomalie excentrique  $E_o$  et l'anomalie moyenne  $M_o$ . Nous utiliserons  $\nu_o$ ,  $E_o$  ou  $M_o$  selon le cas, sachant que ces trois anomalies représentent la même information (la position du satellite sur l'orbite). L'anomalie vraie  $\nu_o$  correspond à l'angle entre l'axe du périégée (angle  $\omega_o$ ) et la position géométrique réelle du satellite sur l'orbite comme l'indique la Figure 3.3. L'anomalie excentrique  $E_o$  est l'angle entre l'axe du périégée et la projection de la position réelle du satellite sur le cercle défini par une excentricité nulle ( $e_o=0$ ), les autres paramètres de l'orbite étant égaux par ailleurs. Enfin, l'anomalie moyenne  $M_o$  correspond à l'angle entre l'axe du périégée et la position du satellite si celui-ci avait une vitesse angulaire constante.

Ces trois variantes sont liées par les équations suivantes :

$$\nu_o = 2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1+e_o}{1-e_o}} \tan \frac{E_o}{2} \right) \quad (3.8)$$

$$M_o = E_o - e_o \sin E_o \quad (3.9)$$



Le calcul de  $E_o$  sachant  $M_o$  n'est pas trivial analytiquement.

De même, nous utiliserons selon le cas le demi-grand axe  $a_o$  ou le mouvement moyen  $n_o$ , que la troisième loi de Kepler permet de définir comme deux paramètres équivalents :

$$n_o = \sqrt{\frac{\mu}{a_o^3}} \quad (3.10)$$

Par ailleurs, la connaissance des paramètres képlériens classiques est équivalente à la connaissance d'un vecteur position-vitesse. Les équations de passage sont indiquées en Annexe C.

### Propagation de l'orbite dans le temps

Afin de prédire la position d'un satellite à l'instant  $t_o + \Delta t$  sachant son orbite à un instant  $t_o$ , on intègre les paramètres variables sur  $\Delta t$ . Dans le cas képlérien simple (sans  $J_2$ ) seul l'anomalie varie. Selon le paramètre choisi, la dérive moyenne est donnée par l'équation (3.11), l'équation (3.12) ou l'équation (3.13).

$$\dot{M}_o(t) = n_o \quad (3.11)$$

$$\dot{i}_o(t) = \left( \frac{a_o}{r(t)} \right)^2 \sqrt{1 - e_o^2} n_o \quad (3.12)$$

$$\dot{E}_o(t) = \frac{a_o}{r(t)} n_o \quad (3.13)$$

En général, on préfère intégrer  $M_o$  et résoudre numériquement l'équation (3.9) en  $E_o$ .

### 3.3.2 Dérive des paramètres orbitaux

Prendre en compte le second harmonique zonal (paramètre  $J_2$ ) permet d'affiner simplement le modèle képlérien de base. Le second harmonique zonal se traduit par les dérivées des paramètres  $\Omega_o$ ,  $\omega_o$  et  $\nu_o$ . Les dérivées moyennes de  $\Omega_o$ ,  $\omega_o$  et  $\nu_o$  (les dérivées de  $a_o$ ,  $e_o$  et  $i_o$  sont nulles en moyenne) s'expriment selon les équations (équation (3.14)-(3.16)), où  $r_{eq}$  est le rayon équatorial de la Terre.

$$\dot{\Omega}_o = -\frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_{eq}}{a_o} \right)^2 n_o \frac{\cos i_o}{(1 - e_o^2)^2} \quad (3.14)$$

$$\dot{\omega}_o = \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_{eq}}{a_o} \right)^2 n_o \frac{4 - 5 \sin^2 i_o}{(1 - e_o^2)^2} \quad (3.15)$$

$$\dot{M}_o = n_o + \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_{eq}}{r} \right)^2 n_o \frac{2 - 3 \sin^2 i_o}{(1 - e_o^2)^{3/2}} \quad (3.16)$$

Par exemple, si l'on considère une orbite de mouvement moyen  $n_o = 15,70406856$  révolutions par jour, d'excentricité  $e_o = 0,0007976$  et d'inclinaison  $i_o = 51,6335^\circ$ , on peut calculer une dérive moyenne  $\dot{\Omega}_o$  de  $-2.5546^\circ$  par jour, soit en moyenne  $-0.1627^\circ$  par révolution.

### 3.4 Le modèle SGP

Le modèle SGP résulte des travaux de Brouwer [26] et de Lane et Cranford [27, 28]. Ces travaux donnent lieu à des équations de propagation (calcul semi-analytique du couple  $\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}$  à partir de paramètres orbitaux) publiées en 1980 par Hoots et Roehrich [14]. Depuis lors, ces équations, utilisées pour la construction du catalogue Space-Track rendu public par USSTRATCOM, ont évolué sans pour autant que leurs modifications fassent l'objet de publications officielles. En 2006, Vallado, Crawford et Hujsak publient alors une version plus robuste de la fonction de propagation qui permet une propagation plus satisfaisante des éléments du catalogue Space-Track [29].

Le modèle SGP permet de prédire la position d'un objet sachant ses paramètres orbitaux avec une précision de l'ordre de 1 Km sur un jour. Ce modèle permet donc de simuler des trajectoires avec une précision suffisante pour la validation d'algorithmes de catalogage, c'est pourquoi nous avons choisi de l'utiliser dans cette thèse (version 2006 de Vallado [29]). De plus, ce modèle permet une utilisation cohérente des données publiques du catalogue américain Space-Track qui fournit ainsi un échantillon représentatif de la population de satellites en orbite basse.

Par comparaison au modèle képlérien simple ou avec  $J_2$ , SGP modélise plus finement l'influence du potentiel terrestre ainsi que l'effet de traînée sous l'hypothèse d'une densité atmosphérique à décroissance exponentielle, sphérique et invariante par rotation.

#### 3.4.1 Modélisation du potentiel terrestre

Le modèle SGP utilise les quatre premiers harmoniques zonaux du potentiel terrestre. L'équation (3.17) explicite le potentiel exprimé par l'équation (3.6) en négligeant les harmoniques zonaux d'ordre supérieur à  $J_4$ .

$$\begin{aligned}
 U_{T, \text{SGP}}(r, \phi_{\text{géo}}) = & \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \left( \frac{r_{\text{éq}}}{r} \right)^2 \frac{J_2}{2} (3 \sin^2 \phi_{\text{géo}} - 1) \right. \\
 & - \left( \frac{r_{\text{éq}}}{r} \right)^3 \frac{J_3}{2} (5 \sin^3 \phi_{\text{géo}} - 3 \sin \phi_{\text{géo}}) \\
 & \left. - \left( \frac{r_{\text{éq}}}{r} \right)^4 \frac{J_4}{8} (35 \sin^4 \phi_{\text{géo}} - 30 \sin^2 \phi_{\text{géo}} + 3) \right] \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Pour la Terre, les valeurs des coefficients de ces harmoniques zonaux sont les suivants, sachant que les coefficients d'ordre supérieur sont inférieurs à  $10^{-6}$  en valeur absolue :

$$\begin{aligned}
\mu &= 3,986\,005.10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \\
J_2 &= 0,001\,082\,625 \\
J_3 &= -0,000\,002\,534 \\
J_4 &= -0,000\,001\,623
\end{aligned}$$

Les harmoniques zonaux sont les composantes du potentiel terrestre dépendants de la latitude  $\phi_{\text{géo}}$  uniquement. D'autres composantes, dépendant à la fois de la longitude  $\theta_{\text{géo}}$  et de la latitude  $\phi_{\text{géo}}$ , peuvent intervenir pour davantage de précision dans des modèles plus complexes.

### 3.4.2 Modélisation paramétrique de la traînée atmosphérique

Le phénomène de traînée (pression exercée par l'atmosphère dans le sens opposé au mouvement) est modélisé par un paramètre d'état supplémentaire  $B^*$  et un modèle exponentiel de la pression atmosphérique  $P$  en fonction de l'altitude  $h_{\text{géo}}$  [27, 28], donné en équation (3.18), où  $p$  est la pression atmosphérique,  $h_{\text{géo}}$  l'altitude,  $p_{\text{réf}}$  et  $h_{\text{réf}}$  une pression et une altitude de référence et  $H$  un facteur d'échelle.

$$p(h) = p_{\text{réf}} \exp\left(-\frac{h_{\text{géo}} - h_{\text{réf}}}{H}\right) \quad (3.18)$$

Le paramètre de traînée  $B^*$  conditionne l'accélération de traînée  $\mathbf{a}_{\text{drag}}$  tel que l'exprime l'équation (3.19), où  $\mathbf{v}$  est le vecteur vitesse de l'objet considéré dans un référentiel ECI.

$$\mathbf{a}_{\text{drag}} = -\frac{1}{2B^*} p(h_{\text{géo}}) \|\mathbf{v}\| \mathbf{v} \quad (3.19)$$

## 3.5 Le catalogue Space-Track

Le SSN américain catalogue plus de 20 000 satellites dont plus de 11 000 en orbite basse. Ces objets sont de diamètre supérieur à 4 ou 5 cm en général. Le catalogue Space-Track est publié de manière discrétionnaire par USSTRATCOM et constitue la seule base de d'orbites réelles accessible librement (hormis le catalogue MASTER de l'ESA, qui quant à lui décrit des flux plutôt que des objets individuels).

### 3.5.1 Format des éléments

Le catalogue Space-Track est constitué d'éléments formatés sur deux ou trois lignes (Two-Line Elements ou Three-Line Elements, TLE), chaque élément décrivant l'orbite d'un objet estimée à partir des observations du SSN américain (*cf.* Chapitre 1) en utilisant notamment le modèle SGP pour les orbites basses. Par exemple, le TLE :

ISS (ZARYA)

```
1 25544U 98067A 04236.56031392 .00020137 00000-0 16538-3 0 5135
2 25544 51.6335 341.7760 0007976 126.2523 325.9359 15.70406856328903
```

décrit l'orbite de l'ISS (identifiant ZARYA) dont les paramètres sont :

$$\begin{aligned}
 t_o &= 04236,56031392 \text{ (UTC)} \\
 &\quad (236,56031392^{\text{ème}} \text{ jour de l'année 2004}) \\
 n_o &= 15,70406856 \text{ révolutions/jour} \\
 e_o &= 0,0007976 \\
 i_o &= 51,6335^\circ \\
 \Omega_o &= 341,7760^\circ \\
 \omega_o &= 126,2523^\circ \\
 M_o &= 325,9359^\circ \\
 B* &= 0,16538 \cdot 10^{-3} r_{\text{éq}}^{-1}
 \end{aligned}$$

où  $r_{\text{éq}}$  est le rayon terrestre à l'équateur.

La catalogue Space-Track, utilisé avec une fonction de propagation  $f_{\text{SGP}}$  (fournie par [14]), permet de calculer la position et vitesse  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})_t$  à un instant  $t$  de chaque objet (associé à des paramètres orbitaux  $\mathbf{X}_{t_o}$ ) qu'il contient. Leurs détections par un ou plusieurs capteurs peuvent alors être simulées et permettre la validation d'algorithmes de pistage.

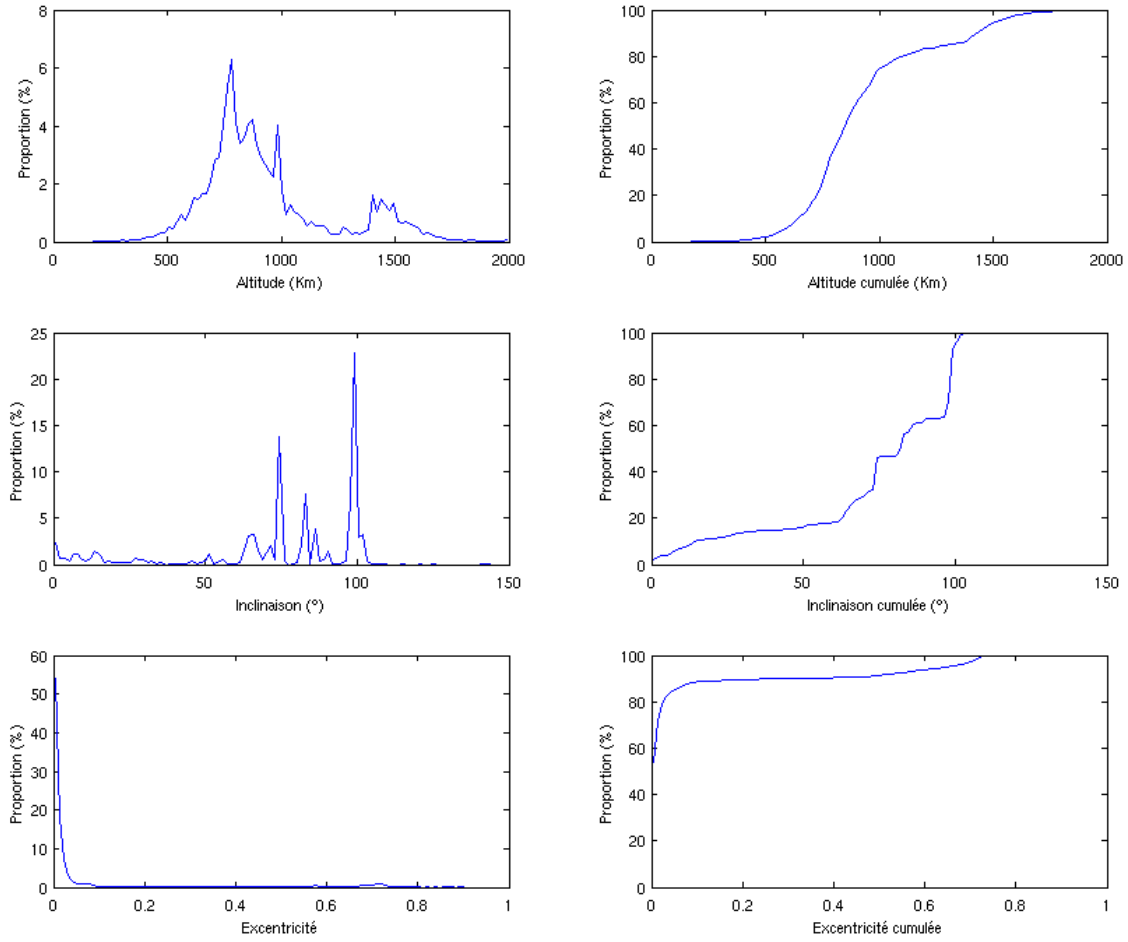
$$f_{\text{SGP}}(\mathbf{X}_{t_o}, t) = (\mathbf{r}, \mathbf{v})_{\mathbf{X}_{t_o}, t} \quad (3.20)$$

Dans la Partie III, la fonction  $f_{\text{SGP}}$  est constamment utilisée pour simuler ou prédire des observations.

### 3.5.2 Distribution des paramètres orbitaux

La population des objets en orbite basse se caractérise par une concentration non-uniforme selon l'altitude comme le montre la Figure 1.1 mais également par des inclinaisons particulières et des excentricités faibles. En effet, les histogrammes de la Figure 3.4 mettent en évidence que peu d'objets en orbite basse ont une inclinaison faible (inférieur à  $50^\circ$ ) et que la majorité des objets ont une excentricité faible (inférieure à 0,05), voire très faible. Les objets en orbite basse (altitude de l'apogée comprise entre 200 Km et 2000 Km) ont une période de révolution comprise entre 88 minutes et 127 minutes.

Dans cette étude, nous faisons l'hypothèse fondamentale que le catalogue Space-Track fournit un échantillon représentatif des objets en orbite basse. En effet, les objets plus petits que sont les débris sont en général générés par de plus gros objets (*cf.* Chapitre 1). Ils conservent alors une énergie mécanique voisine et se trouvent par conséquent sur des orbites proches et/ou ré-entrent dans l'atmosphère.



**Figure 3.4** – Distributions en altitude (de l’apogée), en inclinaison et en excentricité des objets en orbite basse présents dans le catalogue Space-Track.

## 3.6 Conclusion du chapitre

La dynamique des objets que nous cherchons à cataloguer se modélise au premier ordre par un modèle képlérien. Les trajectoires résultantes de ces objets sont des ellipses de faibles excentricités et de fortes inclinaisons par rapport au plan équatorial dans un référentiel ECI, ce qui confirme le choix justifié dans le Chapitre 2 d’un capteur dont l’emprise est orientée vers l’équateur et large en azimuth : la plupart des objets devraient être observés quand le capteur s’approche des longitudes des nœuds ascendants dans un référentiel ECI.

Dans cette étude, nous utilisons en pratique le modèle SGP pour davantage de réalisme lors des simulations. En effet, la précision de ce modèle en termes de trajectoire est adaptée à l’échelle de temps que l’on pressent puisque la plupart des objets devrait passer dans le champ de veille du capteur au moins une fois par jour. Par ailleurs, ce modèle permet de propager avec précision les éléments du catalogue Space-Track, lui-même représentatif de la population d’objets en orbite basse.

# Conclusion de la première partie

La densité d'objets en orbite basse est critique et pose un problème pour la viabilité des installations spatiales présentes et futures. Pour l'observation de ces orbites, des moyens radars sont plus souvent envisagés car les conditions d'observation sont moins contraignantes en comparaison à des capteurs passifs. Les systèmes existants, comme par exemple le FPS-85 et le Cobra Dane ou encore GRAVES, démontrent la faisabilité de la surveillance des orbites basses par des moyens actifs, bien que leurs performances soient limitées en termes de taille minimale des objets catalogables.

Les contraintes physiques du radar que nous avons évoquées ainsi que les résultats d'expérimentations menées par les américains nous ont permis de définir un paramétrage de capteur radar hypothétique mais envisageable pour la détection de petits objets. La précision choisie en angulaire (azimut et élévation) de  $\sigma_\theta = \sigma_\phi = 0,2^\circ$  est faible : elle génère des volumes d'incertitude d'environ 3,5 Km de rayon à 1-sigma à une distance de 1000 Km (env. 11,5 Km à 3-sigma). Dans ce cas, les observations rapprochées dans le temps et dans l'espace sont fortement redondantes et cela doit être compensé par des observations très nombreuses ou très espacées dans le temps. La réduction du champ de veille choisie permettant la détection d'objets plus petits à bilan comparable impose un nombre réduit (1 ou 2) d'observations par traversée, qui doivent alors être associées à des intervalles de temps relativement importants (plusieurs heures).

À ce stade, nous pouvons anticiper la difficulté de l'orbitographie à partir de courtes traversées du champ de veille. En effet, une orbite comprend au moins sept paramètres, alors qu'une observation fournit seulement trois mesures datées et sans redondance : une distance en plus de deux angles avec des erreurs de mesure pouvant être importantes. Sachant le grand nombre d'objets (11 000 objets dans le catalogue Space-Track et l'on estime à entre 100 000 et 500 000 le nombre de petits objets de plus de 1 cm) en plus de la présence de fausses alarmes, tester toutes les combinaisons d'observations possibles et en déduire des orbites est rédhibitoire. Il faut donc développer et mettre en œuvre des méthodes de traitement de l'information permettant de réduire cette complexité combinatoire à un degré raisonnable.

Cette thèse aborde par conséquent la résolution d'un cas typique de non-observabilité : l'état orbital d'un objet ne peut être calculé avec une précision suffisante à partir d'une seule traversée dans le FOR par manque d'information disponible. L'association de plusieurs traversées (observations) est alors nécessaire pour calculer les orbites permettant de suivre les objets de manière satisfaisante et implique une complexité combinatoire très forte du fait de la densité importante de détections et de

fausses alarmes attendue. Pour contribuer à la résolution de ce problème, nous proposons dans cette thèse des méthodes de traitement de l'information mieux adaptées que les méthodes existantes, présentées dans la partie consacrée à l'état de l'art, dans le but de permettre la faisabilité d'un système de surveillance de l'espace tout en évitant une explosion de coût du capteur physique.

## Deuxième partie

### Synthèse et analyse des techniques existantes contribuant au catalogage





# Introduction de la deuxième partie

Le catalogage a pour but de déterminer l'orbite du plus grand nombre possible d'objets présents avec une précision suffisante pour les missions associées. Pour cela, chaque objet doit être suivi, ou pisté, en associant en une séquence (piste) des observations dont il est la source sur plusieurs révolutions.

Des techniques pour l'association d'observations et la détermination d'orbite existent et sont applicables dans le cas d'observations non-isolées, c'est-à-dire issues d'un capteur de grande emprise (champ de veille). Nous les distinguons en trois groupes :

- le pistage monocible, qui consiste à estimer ou à mettre à jour l'état (les paramètres orbitaux) d'une piste dans un but de prédiction de position future par exemple, ou encore dans un but de filtrage du bruit de mesure,
- le pistage multicible, dont le rôle est de filtrer les différentes hypothèses d'association possibles générées par une fonction tirant parti de la connaissance d'une orbite pour corréler de nouvelles observations à une piste existante,
- la détermination d'orbite préliminaire, qui permet de calculer une orbite initiale à partir d'un jeu d'observations associées au préalable et permet ainsi d'initialiser le pistage.

Les principales techniques existantes ont fait l'objet de nombreuses études et leurs robustesses ont été éprouvées dans de nombreuses applications. Pour chacune des problématiques, nous étudions les méthodes classiques et en déduisons si elles peuvent se décliner pour répondre aux problèmes posés par le catalogage par observations isolées.



# Chapitre 4

## Pistage

L'objectif du catalogage est de détecter et de suivre le plus grand nombre possible d'objets (la liste de leurs orbites constitue le catalogue). Cela peut être fait à partir des données provenant d'un capteur, c'est-à-dire dans notre cas des observations de position datées. Ces données sont dégradées notamment par un bruit de mesure, c'est pourquoi il est nécessaire de faire appel à une fonction de pistage monocible. La connaissance de techniques de pistage est donc indispensable pour justifier les choix liés au catalogage d'objets spatiaux.

Ce chapitre définit dans un premier temps les techniques de pistage monocible comme un sous-ensemble des techniques de modélisation paramétriques. Les particularités de ces techniques vis-à-vis de la chronologie des observations ou de l'aspect temps-réel sont ensuite abordées à travers la présentation des techniques les plus utilisées telles que l'algorithme de Gauss-Newton et les filtres de Kalman.

Ensuite, les approches les plus populaires pour le pistage multicible sont présentées dans une courte synthèse. Le choix du TO-MHT est enfin justifié au regard des spécificités du problème du catalogage d'objets spatiaux par observations isolées.

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Pistage Monocible . . . . .</b>	<b>44</b>
4.1.1	Modélisation paramétrique . . . . .	44
<b>4.2</b>	<b>Estimation d'un état à partir d'une piste existante . . .</b>	<b>45</b>
<b>4.3</b>	<b>Pistage multicible . . . . .</b>	<b>48</b>
4.3.1	Approches bayésiennes . . . . .	51
4.3.2	Approches non-bayésiennes . . . . .	53
<b>4.4</b>	<b>Choix d'un TO-MHT résultant des contraintes d'emploi</b>	<b>56</b>
<b>4.5</b>	<b>Conclusion du chapitre . . . . .</b>	<b>58</b>

---

## 4.1 Pistage Monocible

Les techniques de pistage [30, 17, 31] par modélisation paramétrique utilisent un modèle dynamique du système afin de filtrer le bruit de mesure des observations. Ce modèle est paramétré selon un vecteur d'état qui représente l'orbite d'un objet dans le cadre de cette étude. Chaque objet en orbite basse est en effet caractérisé par des paramètres d'état (paramètres orbitaux) qui permettent d'estimer sa position au cours du temps grâce à un modèle dynamique (*cf.* Chapitre 3) choisi en fonction d'un compromis entre la précision du modèle et la précision des mesures.

### 4.1.1 Modélisation paramétrique

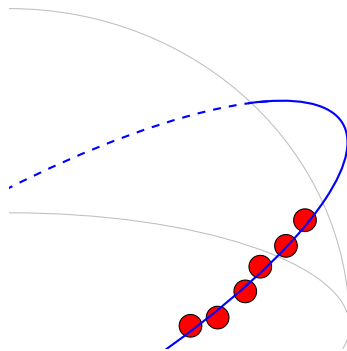
L'état  $\mathbf{X}_k$  d'un système désigne le vecteur des paramètres orbitaux à l'instant  $k$  et le vecteur d'observation  $\mathbf{z}_k$  désigne le vecteur des mesures délivrées par le capteur à l'instant  $k$ . Ces vecteurs sont liés par l'équation de modèle et l'équation d'observation qui sont définies de manière générale par les relations (4.1) et (4.2) :

$$\mathbf{X}_{k+l} = f(\mathbf{X}_k, l) + \boldsymbol{\zeta}_{k+l} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{X}_k) + \boldsymbol{\eta}_k \quad (4.2)$$

où  $f(., l)$  est la fonction de transition de l'état  $\mathbf{X}_k$  à l'instant  $k$  vers l'instant passé ou futur  $k + l$ ,  $h$  est la fonction d'observation,  $\boldsymbol{\zeta}$  est un bruit de modèle additif (représente l'erreur entre le modèle et la réalité) et  $\boldsymbol{\eta}$  est un bruit d'observation additif (représente l'erreur de mesure).

L'espace des paramètres d'observation est lié au référentiel capteur dans lequel sont mesurées les distances, azimuts et élévations des détections. La composée  $h \circ f$  est alors équivalente à la fonction  $h_{\text{capteur}} \circ f_{\text{SGP}}$ . Notons que  $f_{\text{SGP}} \neq f$  car  $f_{\text{SGP}}$  n'est pas un endomorphisme.



**Figure 4.1** – Schéma d'une orbite (courbe bleue) calculée à partir d'observations de position bruitées (disques rouges). Le modèle dynamique associé à une technique d'estimation permet de calculer la trajectoire de l'objet aux instants des observations (lissage), à des instants futurs (prédiction) ou à des instants passés (rétrodiction).

Dans notre cas, le bruit associé au modèle SGP est infime en comparaison du bruit de mesure du capteur défini au Chapitre 2 sur l'échelle de temps considérée (quelque

jours). Pour la simulation, ce bruit représente l'écart de modèle entre l'outil qui simule les observations du capteur et l'algorithme qui résout le problème de pistage ou de catalogage. Quand les modèles utilisés sont strictement identiques, ce bruit est nul. Dans le cadre de cette étude, les versions du modèle SGP utilisées pour ces deux fonctions sont différentes : les observations sont simulées à l'aide d'un outil interne ONERA implémentant une version corrigée de SGP, et le problème de pistage est traité grâce à la version publiée par Vallado [29]. Cela induit un bruit de modèle non-nul mais de très faible amplitude par rapport au bruit de mesure.

## 4.2 Estimation d'un état à partir d'une piste existante

Si l'on dispose de suffisamment d'observations, on peut estimer un état passé ou futur  $\mathbf{X}_{k+l}$  dont on peut déduire une valeur d'observation prédite  $h(\mathbf{x}_{k+l})$ . L'objectif des techniques de filtrage paramétrique est d'évaluer l'erreur entre les mesures fournies par le capteur et les mesures prédites afin de corriger l'état. On cherche à estimer le mieux possible l'état du système à partir d'un jeu d'observations  $\{\mathbf{z}_i\}$  afin de réduire l'influence du bruit d'observation  $\boldsymbol{\eta}$  et donc d'améliorer la connaissance des valeurs vraies des  $\{\mathbf{z}_k\}$  observés, comme l'illustre la Figure 4.1, ou d'améliorer la précision d'une observation prédite.

L'estimation d'état consiste à optimiser un critère faisant intervenir les observations de la piste disponibles ainsi que le modèle dynamique. En général, le problème est rapporté à la minimisation d'une erreur quadratique, comme l'énonce l'équation (4.3), où  $\varepsilon_Q(\mathbf{x})$  est l'erreur quadratique dépendant de l'état  $\mathbf{x}$  et  $n$  le nombre d'observations disponibles dans la piste.

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \varepsilon_Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{z}}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{z}_i)^T \mathbf{P}_{\mathbf{z}_i \mathbf{z}_i}^{-1} (\bar{\mathbf{z}}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{z}_i) \right\} \quad (4.3)$$

Le terme  $\mathbf{P}_{\mathbf{z}_i \mathbf{z}_i}^{-1}$  permet de normaliser chaque mesure de l'observation par son erreur de mesure, ce qui est indispensable notamment dans les cas où les éléments du vecteur d'observation ne sont pas homogènes (par exemple, une observation de position en coordonnées sphériques). Pour résoudre le problème formalisé par l'équation 4.3, on peut utiliser un algorithme de Gauss-Newton ou une méthode de type Kalman.

### Algorithme de Gauss-Newton

L'algorithme de Gauss-Newton [32] permet de résoudre le problème d'estimation non-linéaire de l'équation (4.3) de manière itérative, à condition que la fonction  $\varepsilon_Q(\mathbf{x})$  soit différentiable sur un voisinage du minimum et que ce minimum soit un point stationnaire ( $\varepsilon'_Q(\hat{\mathbf{X}}) = 0$ ). Cet algorithme itératif nécessite la connaissance *a priori* d'une valeur initiale de  $\mathbf{x}$  relativement proche de la solution, car les conditions mentionnées ci-avant ne garantissent pas la convergence vers un minima global. Si

l'algorithme converge, ces conditions garantissent en effet que la limite de convergence est un extremum (minimum ou maximum) local. La résolution de ce problème consiste alors à déterminer un incrément  $\Delta \mathbf{x}$  à chaque itération pour converger vers la solution recherchée.

On peut écrire le développement de Taylor au premier ordre de la dérivée première de  $\varepsilon$  au voisinage de  $\mathbf{x}$  ( $\|\Delta \mathbf{x}\|$  proche de 0) et déduire de l'équation (4.4) l'approximation de l'équation (4.5).

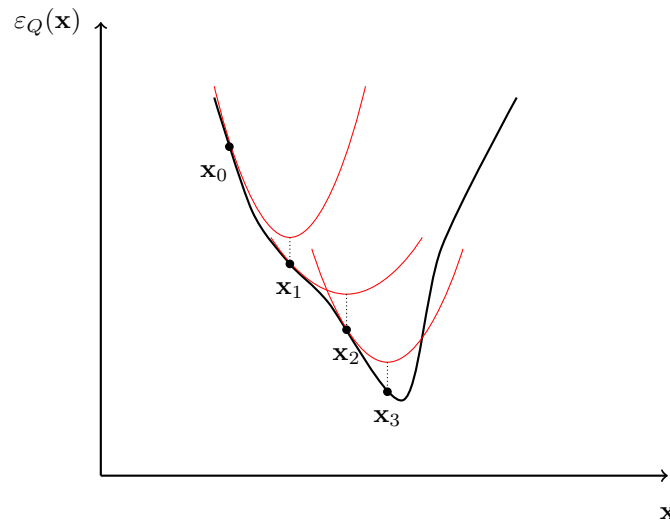
$$\varepsilon'_Q(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \varepsilon'_Q(\mathbf{x}) + \varepsilon''_Q(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x} + O(\|\Delta \mathbf{x}\|^2) \quad (4.4)$$

$$-\varepsilon'_Q(\mathbf{x}) = \varepsilon''_Q(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x} \quad (4.5)$$

En approchant les dérivées  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon''$  par, respectivement,  $\mathbf{J}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\mathbf{J}_\varepsilon^T \mathbf{J}_\varepsilon$ , où  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est le vecteur de résidus tel que  $\varepsilon_Q = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\mathbf{J}_\varepsilon$  est la matrice jacobienne de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en  $\mathbf{x}$ , on déduit une expression approchée de l'incrément  $\Delta \mathbf{x}$  :

$$\Delta \mathbf{x} \simeq -(\mathbf{J}_\varepsilon^T \mathbf{J}_\varepsilon)^{-1} \mathbf{J}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.6)$$

L'algorithme consiste alors à incrémenter un état préliminaire  $\mathbf{x}_0$  de quantités  $\{\Delta \mathbf{x}_i\}$  calculées grâce à l'équation (4.6) jusqu'à satisfaire un critère de convergence. L'utilisation de cet algorithme ne garantit pas la convergence en particulier si la valeur initiale  $\mathbf{x}_0$  est trop éloignée de la solution. Le choix d'une valeur initiale  $\mathbf{x}_0$  est donc particulièrement important et fait l'objet d'une littérature abondante dans le cadre de l'estimation d'orbite.



**Figure 4.2** – Schéma représentant le comportement de l'algorithme de Gauss-Newton sur un domaine à une dimension. Une hypothèse quadratique est adoptée à chaque pas (développement en série de Taylor limité à l'ordre 2). L'incrément est calculé en fonction du minimum de la courbe quadratique déduite de la matrice jacobienne.

En général, cet algorithme a une convergence quadratique lorsque l'on s'approche de la solution, c'est-à-dire que l'on vérifie l'équation (4.7) pour  $k$  suffisamment grand, avec  $C$  une constante réelle :

$$\|\Delta \mathbf{x}_{k+1}\| \leq C \|\Delta \mathbf{x}_k\|^2 \quad (4.7)$$

Ce comportement se vérifie quand la matrice  $\mathbf{J}_\epsilon^T \mathbf{J}_\epsilon$  est définie positive. Si cette matrice est définie négative, alors l'algorithme converge vers un maxima.

De nombreuses variantes de cet algorithme ont été proposées dans la littérature. On peut citer en particulier l'algorithme de Levenberg-Marquardt [32] qui interpole l'algorithme de Gauss-Newton avec une descente de gradient. En comparaison de l'algorithme de Gauss-Newton classique, cette interpolation permet d'augmenter la vitesse de convergence lorsque l'on est loin de la solution. En revanche, elle fait intervenir davantage de paramètres.

**Critères de convergence** La définition d'un critère de convergence est nécessaire pour conditionner la sortie de la boucle d'itérations. Classiquement, le critère suivant s'applique :

$$\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \Delta \mathbf{x} < s_C \quad (4.8)$$

Le choix de la valeur de  $s_C$  est souvent fait dans l'hypothèse selon laquelle  $\Delta \mathbf{x}$  peut être vue comme la réalisation d'une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$  (à un facteur multiplicatif près). Dans ce cas, la quantité  $\Delta \mathbf{x}^T (\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}})^{-1} \Delta \mathbf{x}$  suit une loi du Khi-2 au même titre que le carré de la distance de Mahalanobis définie par l'équation (4.14) [33].

D'autres critères de sortie de la boucle d'itérations peuvent être adoptés comme par exemple le rapport des normes de l'incrément et de l'état actuel défini par l'équation (4.9) ou encore le rapport de la différence des normes des résidus avant et après l'incrémentation de l'état sur la norme du résidu avant l'incrémentation de l'état, comme le montre l'équation (4.10).

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} < s_C \quad (4.9)$$

$$\frac{\left| \|\epsilon(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})\| - \|\epsilon(\mathbf{x})\| \right|}{\|\epsilon(\mathbf{x})\|} < s_C \quad (4.10)$$

Dans ces cas, la valeur de  $s_C$  est en général déterminée de manière empirique.

Afin d'estimer la pertinence de la solution retournée par l'algorithme, la norme des résidus peut être testée. Sous une hypothèse gaussienne, le carré de cette norme correspond en effet à une loi du Khi-2 à  $m - 1$  degrés de liberté, où  $m$  est le nombre total de mesures contenues dans l'ensemble des observations.



## Filtres de Kalman

L'algorithme de Gauss-Newton est coûteux en temps de calcul car il nécessite le calcul de matrices jacobiennes pour chaque observation, à chaque itération, et doit être effectué à chaque fois qu'une observation devient disponible pour garder l'estimée à jour. Dans le cas d'applications en temps réel où les observations sont faites au cours du temps, on envisage en général l'utilisation d'un filtre de Kalman [34] qui permet de minimiser le même critère d'erreur quadratique, mais de manière récursive sur les observations. Sous réserve que le filtre soit correctement initialisé, ces calculs permettent d'obtenir une série d'estimées convergentes vers une solution qui minimise le critère de moindres carrés (4.3).

En somme, une estimation est retournée sachant les  $n$  observations disponibles à un instant donné et une  $(n + 1)^{\text{ème}}$  observation peut être traitée par un calcul simple pour mettre à jour l'estimée à l'instant où cette observation était disponible. Dans le cas linéaire, les fonctions  $f$  et  $h$  des équations (4.1) et (4.2) sont exprimées par des matrices  $\mathbf{F}_k$  et  $\mathbf{H}_k$  dépendant de l'instant  $k$ . En général, des hypothèses *a priori* permettent de caractériser les bruits de modèle et d'observation par des matrices de covariances particulières dépendant du modèle dynamique adopté. Les équations de modèle et d'observation s'expriment alors selon les formules (4.11) et (4.12), dans le cas d'ordre 1 ( $l = 1$ ).

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{F}_{k+1}\mathbf{X}_k + \boldsymbol{\zeta}_k \quad (4.11)$$

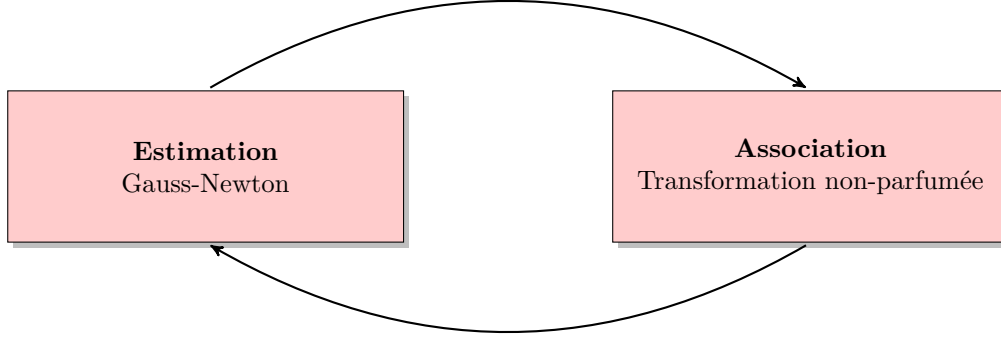
$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} + \boldsymbol{\eta}_{k+1} \quad (4.12)$$

Cependant le modèle SGP, requis pour utiliser le catalogue Space-Track, ne permet pas d'accéder aux quantités mathématiques nécessaires au fonctionnement d'un filtre de Kalman telles que les matrices  $\mathbf{F}_k$  et  $\mathbf{H}_k$ , ou encore les matrices de covariance des bruits  $\boldsymbol{\zeta}_k$  et  $\boldsymbol{\eta}_{k+1}$ . Nous retenons alors l'algorithme de Gauss-Newton pour l'estimation d'orbite.

## 4.3 Pistage multicible

Lorsque plusieurs sources d'observations sont présentes (plusieurs cibles et/ou fausses alarmes), le problème d'associer les observations en pistes se pose. Les méthodes présentées dans cette section ont pour objectif d'associer les observations de manière séquentielle, c'est-à-dire d'associer de nouvelles observations à des pistes existantes à un instant  $k$ . Le pistage multicible se décompose alors en deux étapes : une étape d'estimation d'état et une étape d'association d'une nouvelle observation à une piste existante (séquence d'observations). Connaissant un certain nombre d'observations, on peut généralement estimer un état pour décrire la dynamique de la cible. Cela permet par la suite de prédire des observations faites par le capteur et de les associer ou non sur un critère de vraisemblance (car une nouvelle observation peut être issue d'une fausse alarme ou d'une autre cible) à la série d'observations, ou piste, utilisées

pour estimer l'état. Quand de nouvelles observations sont associées, on peut mettre à jour l'état des pistes concernées.



**Figure 4.3** – Le cycle association-estimation fait intervenir l’estimation des paramètres d’un modèle ainsi que des techniques d’association de nouvelles observations.

Le cycle association-estimation fait intervenir l’estimation des paramètres d’un modèle ainsi que des techniques d’association de nouvelles observations, comme par exemple la méthode de Gauss-Newton et la transformation non-parfumée. À chaque nouvelle observation associée, une estimation plus précise est possible. Une estimation précise de l’état permet une association plus efficace, *i.e.* sans erreur (rejet d’observation correcte, inclusion de fausse alarme, *etc.*).

### Association d’observations à une piste existante

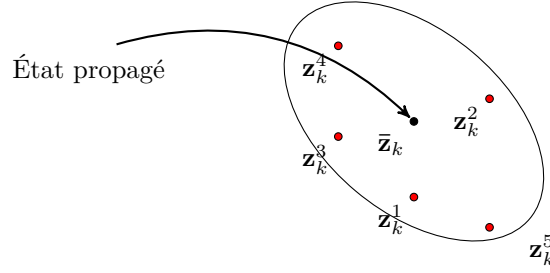
L’association d’une ou de plusieurs observations se fait de manière usuelle par fenêtrage, c’est-à-dire que l’on définit une fenêtre de validation à partir d’un état estimé et de sa matrice de covariance propagés à l’instant de l’observation à tester [35]. La fenêtre est alors définie par l’équation (4.13), où  $d$  est une mesure de distance,  $\bar{\mathbf{z}}_{k+l}$  est la prédiction de l’observation à l’instant  $k + l$  obtenue à partir des observations disponibles, c’est-à-dire  $\bar{\mathbf{z}}_{k+l} = h(\mathbf{x}_{k+l})$ , et par l’intermédiaire d’un état estimé,  $\mathbf{z}_{k+l}$  est l’observation réelle et  $s_F$  est un seuil.

$$d(\bar{\mathbf{z}}_{k+l}, \mathbf{z}_{k+l}) \leq s_F \quad (4.13)$$

Dans cette étude comme dans de nombreux cas, on fait l’hypothèse que les variables aléatoires mises en jeu sont gaussiennes. On choisit alors d’adapter une distance de Mahalanobis pour définir  $d$  tel qu’en équation (4.14), où  $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}}$  est la matrice de covariance de l’observation prédite et  $\mathbf{P}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}$  la matrice de covariance de l’observation réelle (matrice de covariance de l’erreur de mesure).

$$d(\bar{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = \sqrt{(\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{z})^T (\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}} + \mathbf{P}_{\mathbf{z}\mathbf{z}})^{-1} (\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{z})} \quad (4.14)$$

La quantité  $\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$  est appelée “innovation” et notée  $\tilde{\mathbf{z}}$ . Sa matrice de covariance  $\mathbf{S}$  vaut  $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}} + \mathbf{P}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}$ .



**Figure 4.4** – Schéma d’une fenêtre de validation obtenue au scan  $k$  à partir d’une piste. Les observations représentées tombent à l’intérieur de cette fenêtre et sont donc compatibles avec la piste.

Le calcul de  $\bar{z}$  peut se faire par l’utilisation simple de la fonction de transfert  $f$  et de la fonction d’observation  $h$  introduites dans les équations (4.1) et (4.2). En revanche, le calcul de la matrice de covariance  $\mathbf{P}_{\bar{z}\bar{z}}$  n’est pas direct : il fait intervenir soit une linéarisation de  $f$  et de  $h$ , soit une technique de Monte-Carlo (c’est-à-dire qu’on génère et propage des particules) ou encore une transformation “non-parfumée”.

**Transformation non-parfumée** La transformation non-parfumée [36, 37] permet de reconstruire une densité de probabilité *a posteriori* à partir d’échantillons choisis ( $\sigma$ -points) de la densité *a priori*. Le principe sous-jacent de la transformation non-parfumée est de réduire la distribution *a priori* au nombre de points minimal permettant le calcul de ses moments statistiques. Les images de ces points par la fonction non-linéaire en question permettent alors de reconstruire avec une certaine précision la distribution *a posteriori*. Cette méthode étant implémentée dans le cadre de cette étude, nous la décrivons de manière plus détaillée au Chapitre 7.

Le fenêtrage tel que nous le décrivons permet d’associer une ou plusieurs observations à une piste (série d’observations) existante. Les cas ambigus où plusieurs observations (issues d’objets ou de fausses alarmes) simultanées sont associées à une même piste peuvent être traités par les algorithmes de pistage multicible [30, 17, 31]. On distingue parmi ces algorithmes deux grandes classes d’algorithmes : les algorithmes bayésiens et les algorithmes non-bayésiens. Les algorithmes bayésiens font intervenir une moyenne pondérée par des probabilités alors que les méthodes non-bayésiennes fonctionnent sur un principe de minimisation de coût global sur un ensemble combinatoire.

Dans les deux cas, une fonction de fenêtrage est utilisée de manière systématique afin restreindre le nombre d’observations compatibles avec les pistes existantes.

On note  $\mathbf{z}_k^i$  la  $i$ -ème observation acquise au scan  $k$  et  $Z(k)$  l’ensemble des observations issues du scan  $k$ . L’ensemble des observations accumulées jusqu’à l’instant  $k$  est noté  $Z^k$ . Les équations (4.15) et (4.16), où  $m_k$  désigne le nombre d’observations au scan  $k$ , formalisent ces définitions.

$$Z^k = \{Z(i)\}_{i \in \{1, \dots, k\}} \quad (4.15)$$

$$Z(k) = \{\mathbf{z}_k^i\}_{i \in \{1, \dots, m_k\}} \quad (4.16)$$

### 4.3.1 Approches bayésiennes

#### Joint-Probabilistic Data Association Filter (JPDAF)

Le JPDAF [38, 39] nécessite la connaissance du nombre d'objets présents et fait l'hypothèse que les pistes associées à ces objets sont initialisées. À chaque scan  $k$ , une innovation  $\tilde{\mathbf{z}}^t(k)$  résultante de la moyenne pondérée des innovations liées à l'ensemble des observations contenues dans la fenêtre de validation (*cf.* Figure 4.4) est calculée pour chaque cible  $t$ , tel qu'en équation (4.17), où  $\beta_i^t(k)$  est la probabilité que la mesure  $i$  corresponde à la cible  $t$  et  $\tilde{\mathbf{z}}_i^t(k)$  est l'innovation au sens classique entre la prédiction de l'observation issue de la cible  $t$  et l'observation  $i$  du scan  $k$ . L'état de chaque cible est ensuite mis à jour selon les équations du filtre Probabilistic Data Association Filter (PDAF) classique disponibles dans la littérature et analogues à celles du filtre de Kalman.

$$\tilde{\mathbf{z}}^t(k) = \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i^t(k) \tilde{\mathbf{z}}_i^t(k) \quad (4.17)$$

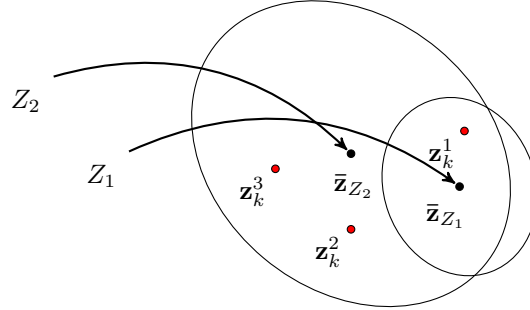
L'expression des probabilités  $\{\beta_i^t(k)\}$  fait intervenir plusieurs paramètres concernant en particulier les probabilités de détection de chaque cible ainsi que la distribution du nombre de fausses alarmes présentes dans le volume de surveillance.

C'est également dans ces probabilités que l'on retrouve des considérations de faisabilité d'hypothèses d'association, c'est-à-dire les différents cas possibles d'association d'observations aux pistes sous la contrainte qu'aucune observation ne peut être associée à plusieurs pistes simultanément et que chaque piste ne peut être associée qu'à une observation au plus à un instant donné. Le JPDAF fait donc intervenir l'ensemble des observations compatibles (validées par une fenêtre) dans le calcul de l'état de chaque objet en évitant une décision tranchée quant aux associations des observations aux pistes à ce stade. En revanche, le raffinement des états des cibles au fur et à mesure que l'on accumule des observations permet un fenêtrage (décision) plus efficace.

#### Hypothesis-Oriented Multiple Hypothesis Tracking (HO-MHT)

Contrairement au JPDAF, le filtre HO-MHT [40, 39] (version classique du MHT) n'impose pas la connaissance du nombre de cibles présentes. En effet, son principal intérêt est qu'il permet de gérer l'apparition d'une nouvelle cible. Le HO-MHT se focalise sur les observations de manière récursive : à chaque scan, les hypothèses

concernant l'origine des observations (piste existante, fausse alarme ou nouvelle piste) sont énumérées et leurs probabilités évaluées.



**Figure 4.5** – Exemple de fenêtres de validation issues de pistes  $Z_1$  et  $Z_2$  à l'instant des observations  $\mathbf{z}_k^1$ ,  $\mathbf{z}_k^2$  et  $\mathbf{z}_k^3$ .

Supposons par exemple l'existence de deux pistes  $Z_1$  et  $Z_2$  dont les fenêtres de validations au scan  $k$  valident les observations  $\mathbf{z}_k^1$  pour  $Z_1$  et  $\mathbf{z}_k^1$ ,  $\mathbf{z}_k^2$  et  $\mathbf{z}_k^3$  pour  $Z_2$  comme l'indique la Figure 4.5. Sachant que les observations  $\mathbf{z}_k^1$ ,  $\mathbf{z}_k^2$  et  $\mathbf{z}_k^3$  peuvent représenter des fausses alarmes ou également de nouvelles pistes ( $Z_3$ ,  $Z_4$  et  $Z_5$ , respectivement), on peut dénombrer 28 hypothèses d'association ( $h_1, \dots, h_{28}$ ). On évalue alors les probabilités  $P(\theta_i^t | Z^k)$  où  $\theta_i^t$  représente l'événement “l'observation  $i$  est issue de la cible  $t$ ” en sommant les probabilités des hypothèses  $\{h_j\}$  contenant  $\theta_i^t$ , dans le but de mettre à jour les états des pistes par l'équation (4.18), où  $\theta_0^t$  représente l'événement “la cible  $t$  n'a pas été détectée” et  $\hat{\mathbf{x}}_i^t(k)$  est l'état de la cible  $t$  mis à jour avec l'observation  $i$  (ou propagé pour  $i = 0$ ).

$$\hat{\mathbf{x}}^t(k) = \sum_{i=0}^{m_k} P(\theta_i^t | Z^k) \hat{\mathbf{x}}_i^t(k) \quad (4.18)$$

Les probabilités des  $\{h_j\}$ , nécessaires au calcul des  $\{P(\theta_i^t | Z^k)\}$ , s'obtiennent par des considérations sur les densités de probabilité de fausse alarme et d'apparition de nouvelles cibles. Une expression de la matrice de covariance mise à jour est par ailleurs disponible dans la littérature.

L'arbre d'hypothèses obtenu est mis à jour de manière récursive et croît de manière exponentielle. Pour garder le nombre d'hypothèses sous contrôle, on abandonne l'optimalité du filtre (toutes les hypothèses d'associations étaient envisagées) en supprimant les hypothèses de probabilité négligeable et en fusionnant les hypothèses similaires (nombres de pistes égaux et états des pistes similaires). Une version “orientée piste” (Track-Oriented Multiple Hypothesis Tracking, TO-MHT) non-bayésienne du HO-MHT est implémentée dans le cadre de cette étude et décrite plus en détail dans la suite de ce chapitre.

### Gaussian-Mixture Probabilistic Hypothesis Density (GM-PHD)

Le filtre PHD [41] est un algorithme récent qui a fait l'objet de nombreuses études. Cet algorithme permet de gérer l'apparition de nouvelles cibles ou leur disparition

en s'appuyant sur une fonction d'intensité  $v_k$  définie sur l'espace d'état des cibles à chaque instant  $k$ . Dans sa variante Gaussian-Mixture PHD, chaque cible  $i$  est représentée par une gaussienne dans l'espace d'état, la somme de ces distributions formant la fonction d'intensité comme l'indique l'équation (4.20) où  $w_k^i$  pondère la gaussienne de moyenne  $\mathbf{m}_k^i$  et de covariance  $\mathbf{P}_k^i$  associée à la  $i^{\text{ème}}$  cible parmi  $J_k$  à l'instant  $k$ .

$$v_k(\mathbf{x}) = \sum_i^{J_k} w_k^i \mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_k^i, \mathbf{P}_k^i) \quad (4.19)$$

À chaque récursion, chaque gaussienne est propagée aux instants des observations par propagation de sa moyenne et de sa covariance selon un filtre de Kalman qui utilise successivement chaque observation pour le calcul d'une innovation. Les gaussiennes générées par la combinaison de chaque cible avec chaque observation sont alors pondérées et celles dont les pondérations sont inférieures à un seuil sont supprimées afin d'éliminer les pistes mortes et les fausses alarmes. La fonction d'intensité devient alors :

$$v_{k+1}(\mathbf{x}) = (1 - P_D)v_{k+1|k}(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{z}} \sum_{i=1}^{J_{k+1|k}} w_{k+1}^i(\mathbf{z}) \mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_{k+1}^i(\mathbf{z}), \mathbf{P}_{k+1}^i) \quad (4.20)$$

où  $P_D$  est la probabilité de détection,  $v_{k+1|k}(\mathbf{x})$  est la fonction d'intensité obtenue par propagation de chaque gaussienne,  $w_{k+1}^i(\mathbf{z})$  et  $\mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_{k+1}^i(\mathbf{z}), \mathbf{P}_{k+1}^i)$  sont respectivement le poids et la gaussienne estimée associés au couple {cible  $i$ , observation  $\mathbf{z}$ }. Une expression de  $w_{k+1}^i(\mathbf{z})$ , non-détaillée dans ce document, est disponible dans les articles de référence.

### 4.3.2 Approches non-bayésiennes

#### Global Nearest Neighbor (GNN)

Le principe du filtre GNN [42] repose sur la recherche de l'hypothèse d'association d'observation à piste de moindre coût à chaque scan, sachant qu'une observation ne peut être associée à plus d'une piste dans le scénario finalement retenu. Pour cela, une fonction de coût peut être définie telle que :

$$d_{G_{ij}}^2 = d_{ij}^2 + \ln |\mathbf{S}_{ij}| \quad (4.21)$$

où  $d_{ij}$  est la distance de Mahalanobis définie en équation (4.14) entre l'observation  $i$  et l'observation prédite à partir de la piste  $j$ , et  $|\mathbf{S}_{ij}|$  est le déterminant de la matrice de covariance associée à l'innovation, ce dernier terme visant à pénaliser les pistes de moindre qualité.

À l'arrivée de nouvelles observations, des fenêtres de validation (équation (4.13)) sont calculées à l'aide des pistes existantes afin de remplir une table d'association.

Dans l'exemple illustré par la Figure 4.5, on obtient la table d'association suivante :

	$\mathbf{z}_k^1$	$\mathbf{z}_k^2$	$\mathbf{z}_k^3$
$Z_1$	2	×	×
$Z_2$	4	3	2
$Z_3$	0	×	×
$Z_4$	×	0	×
$Z_5$	×	×	0

où “×” indique que l'observation n'est pas dans la fenêtre de validation calculée et  $Z_3$ ,  $Z_4$  et  $Z_5$  sont de nouvelles pistes éventuelles.

Cette table permet de déduire un scénario de moindre coût en prolongeant le plus de pistes possible. En l'occurrence, on associe  $\mathbf{z}_k^1$  à  $Z_1$ ,  $\mathbf{z}_k^3$  à  $Z_2$  et  $\mathbf{z}_k^2$  fait l'objet d'une nouvelle piste. Pour confirmer ou supprimer une piste, on peut utiliser une fonction de score cumulatif comme décrite en Section 8.1.4.

D'autres fonctions de coût peuvent être adoptées comme par exemple l'opposé de la distance à la limite de la fenêtre de validation pour les observations valides tel que le définit l'équation (4.22), où  $s_F$  est le seuil utilisé pour valider une mesure ou non.

$$d_{G_{ij}} = d_{ij} - s_F \quad (4.22)$$

### Formulation du problème avec la programmation entière 0-1

L'algorithme GNN est un cas particulier de résolution par programmation entière [39], qui consiste de manière générale à chercher le scénario d'association le moins coûteux sur plusieurs scans. Résoudre un problème de pistage multicible sur tous les scans devient rapidement très coûteux, c'est pourquoi on implémente en général une fenêtre temporelle glissante pour y chercher la meilleure combinaison.

L'association d'observations étant catégorique dans le cas de cet algorithme, la condition selon laquelle une observation ne peut être associée à plusieurs pistes dans le scénario d'association retenu doit être respectée. On généralise alors le concept de faisabilité d'un scénario d'association grâce à un indicateur d'appartenance d'une observation à une piste et à un indicateur d'appartenance d'une piste à un scénario d'association. La condition de faisabilité d'un scénario d'association est respectée si :

$$\mathbf{A}\mathbf{b}_S \leq \mathbf{1} \quad (4.23)$$

où  $\mathbf{1}$  est un vecteur dont les composantes valent 1,  $\mathbf{A}$  désigne la matrice binaire d'appartenance d'observations aux pistes,  $\mathbf{b}_S$  désigne le vecteur binaire d'appartenance des pistes à un scénario d'association  $S$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \{a_{ij}\} \quad \text{tel que} \quad & \begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ si l'observation } i \text{ est associable à la piste } j, \\ a_{ij} = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \\ \mathbf{b}_S = \{b_i\} \quad \text{tel que} \quad & \begin{cases} b_i = 1 \text{ si la piste } i \text{ appartient au scénario } S, \\ b_i = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.24}$$

En construisant le vecteur  $\lambda$  dont chaque composante représente le coût individuel de chaque piste d'observations (par exemple la log-vraisemblance négative), on cherche à minimiser une fonction de coût global, ce qui revient à résoudre :

$$\min_S \mathbf{b}_S^T \lambda \quad \text{sous la contrainte } \mathbf{A} \mathbf{b}_S \leq \mathbf{1} \tag{4.25}$$

Ce problème mathématique classique peut se résoudre (éventuellement après transformation) par des algorithmes d'optimisation tels que ceux présentés par exemple dans [43].

Une synthèse de cette approche est proposée dans [39].

### Track-Oriented Multiple Hypothesis Tracking (TO-MHT)

Le TO-MHT a d'abord été proposé dans [44] et développé dans de nombreux ouvrages et articles tels que [17, 31, 45]. Cette approche, inspirée du HO-MHT, constitue une heuristique efficace et appliquée dans de nombreux cas. Nous implémentons un TO-MHT dans le cadre de cette étude, ce choix étant davantage justifié en Section 4.4.

Des pistes d'observations potentiellement issues du même objet sont formées grâce à des fonctions de fenêtrage telle que la transformation non-parfumée, en levant la règle selon laquelle les observations ne peuvent appartenir à plusieurs pistes. Cela induit un grand nombre de scénarios d'associations que l'on filtre avant d'imposer à nouveau la règle temporairement levée pour former des hypothèses d'associations globales possibles.

**Filtrage au niveau piste** Un critère de qualité tel que la log-vraisemblance est évalué grâce au très répandu Sequential Probability Ratio Test (SPRT) [46]. Pour cela, une log-vraisemblance  $L_Z$  (que l'on appelle “score” dans ce contexte) est calculée pour chaque piste d'observations  $Z$ .

$$L_Z = \log \frac{p(Z|H_1)}{p(Z|H_0)} \tag{4.26}$$

où  $H_1$  est l'hypothèse “toutes les observations de  $Z$  sont issues du même objet” et  $H_0 = \overline{H_1}$ .



Ce score  $L_Z$  est comparé à des seuils  $s_{\text{SPRT},1}$  et  $s_{\text{SPRT},2}$  dont les valeurs sont déterminées par les performances espérées de l'algorithme de pistage en termes de Fausses Pistes confirmées (FP), c'est-à-dire dans ce contexte une piste qui ne seraient pas issues d'un même objet et dont le score serait élevé (erreur de type I), et de pistes correctes supprimées, c'est-à-dire dans ce contexte une piste correcte qui aurait un score faible (erreur de type II). Les probabilités des erreurs de type I  $\alpha$  et de type II  $\beta$  associées sont alors fixées.

La valeur de  $\alpha$  est en général choisie selon la probabilité qu'une fausse alarme (FA) produise une FP sur une certaine durée. Dans cette étude, nous souhaitons avoir un taux moyen de FP d'au plus une FP tous les 10 jours (choix arbitraire), ce qui mène à :

$$\alpha = \frac{\text{Fausse alarme par jour}}{\text{Fausse piste confirmée par jour}} = \frac{86400 * 10}{0,1} = 1,16.10^{-7}$$

La valeur de la probabilité  $\beta$  d'erreur de type II est choisie en fonction de la capacité du système à garder en mémoire un grand nombre d'hypothèses d'associations. Nous fixons une valeur arbitraire  $\beta = 5.10^{-3}$  pour la mise en œuvre du SPRT dans cette étude (*cf.* Chapitre 8).

Sachant  $\alpha$  et  $\beta$ , les seuils du SPRT sont fixés tels que :

$$s_{\text{SPRT},1} = \log \frac{\beta}{1 - \alpha} = -5,2983 \quad (4.27)$$

$$s_{\text{SPRT},2} = \log \frac{1 - \beta}{\alpha} = 15.9669 \quad (4.28)$$

Une piste dont la vraisemblance est inférieure à  $s_{\text{SPRT},1}$  est alors supprimée, tandis qu'une piste dont la vraisemblance est supérieure à  $s_{\text{SPRT},2}$  est confirmée, c'est-à-dire que le risque d'erreur qui y est lié est contrôlé (notamment par  $\alpha$ ).

**Filtrage au niveau global** Les combinaisons des pistes de bonne qualité peuvent être confrontées de plusieurs manières possibles. Le calcul des probabilités de chaque scénario d'association global, ou encore des méthodes plus empiriques telles que le  $N$ -scan pruning peuvent permettre d'éliminer des hypothèses d'association.

Le TO-MHT est davantage détaillé au Chapitre 8 à l'occasion de son adaptation et implémentation dans le cadre de ces travaux.

## 4.4 Choix d'un TO-MHT résultant des contraintes d'emploi

Le catalogage implique, par définition, que le nombre d'objets présents est inconnu alors que le JPDAF, ne permettant pas de prendre en compte l'apparition de nouvelles cibles, nécessite une connaissance *a priori* du nombre de cibles. Cela exclut d'emblée l'utilisation d'un filtre JPDAF pour la résolution de ce problème.

Les autres algorithmes présentés dans cette section autorisent l'apparition ou la disparition de cibles. Cependant, ils présentent des lacunes liées au problème à résoudre. Rappelons que le catalogage d'objets spatiaux par l'utilisation du capteur défini au Chapitre 2 implique principalement :

- des observations isolées d'un même objet très espacées dans le temps,
- un modèle dynamique très précis mais non-observable sans l'association préalable de plusieurs observations,
- des mesures imprécises ne permettant pas de distinguer les objets volant en groupe (satellites en formation, groupes de débris, de particules, *etc.*).

De plus, nous supposons que les objets sont non-manceuvrants de par leur petite taille, ce qui permet de ne considérer qu'un unique modèle dynamique (le modèle SGP).

Le GM-PHD permet de mieux gérer les cas de pistage où les cibles sont proches dans l'espace d'observation en s'affranchissant de l'association d'observation à piste et en estimant le nombre d'objets présents, ce qui n'est pas une fonction nécessaire dans notre cas. Nous préférons par conséquent nous orienter vers des méthodes telles que le MHT ou faisant intervenir la programmation entière.

La résolution par programmation entière est une méthode explicite au sens où l'on minimise directement le coût associé à l'association d'observations en pistes sur une fenêtre temporelle glissante. Cependant, l'éloignement temporel des observations issues d'un même objet implique une matrice d'association  $\mathbf{A}$  de très grande taille (nouvelles pistes accumulées) et de structure très lacunaire (la quasi-totalité de ses éléments sont nuls) dans notre cas, puisque les cibles sont pour la plupart hors du champ de veille du radar. Cette méthode en l'état ne semble donc pas la plus adaptée au problème de catalogage d'objets spatiaux par observations isolées.

Le HO-MHT a l'avantage de retarder la suppression d'hypothèses d'association jusqu'à ce que suffisamment d'information soit disponible pour le permettre avec un degré de certitude contrôlé. Cette particularité du MHT est adaptée au problème de catalogage par observations isolées car elle permet d'accumuler les hypothèses d'association possibles pendant le temps de non-observabilité des nouvelles pistes. En revanche, la rigidité du HO-MHT est un obstacle à l'adaptation correcte de cette algorithmique à un problème peu conventionnel où notamment la quasi-totalité des objets à cataloguer est à chaque instant hors de l'emprise du capteur. Par conséquent, nous nous orientons dans cette étude vers une version plus souple et plus facilement adaptable du MHT, le Track-Oriented MHT (TO-MHT) [44, 17].

Le TO-MHT peut être vu comme une hybridation de la résolution par programmation entière et du HO-MHT dans le sens où cette méthode, non-bayésienne, optimise un ensemble de pistes d'observations tout en permettant de reporter les décisions qui seraient prises avec un degré de certitude faible jusqu'à l'arrivée des observations informatives. Le TO-MHT fournit alors une heuristique permettant de constituer de bons scénarios d'association sans passer par une énumération exhaustive des hypothèses, de garder en mémoire ou non des pistes en phase d'initialisation et de filtrer ces pistes à différents niveaux, comme nous le verrons par la suite.

## 4.5 Conclusion du chapitre

Une hypothèse forte faite dans ce chapitre est que le système que l'on cherche à estimer (c'est-à-dire l'orbite d'un objet pisté) est observable (c'est-à-dire qu'une solution unique existe pour le problème d'estimation) compte tenu des observations disponibles. Dans le cas du radar à champ de veille très étroit, les observations d'un même objet sont rares et très espacées dans le temps, ce qui implique un long délai d'observabilité pendant lequel un filtre de Kalman est susceptible de diverger si l'état estimé est mis à jour en temps réel. De plus, ces filtres nécessitent en général la connaissance d'une matrice de covariance de l'erreur de modèle, difficilement accessible dans le cas du modèle SGP que nous utilisons dans ces travaux. En somme, un filtre de Kalman étendu ou non-parfumé est plus complexe à mettre en œuvre qu'un algorithme de Gauss-Newton, plus lourd en temps de calcul certes, mais plus simple et plus robuste. Par ailleurs, la transformation non-parfumée serait la plus performante : elle évite le calcul de matrices jacobiniennes et ne nécessite qu'un nombre réduit de particules, ce qui la rend à la fois précise et peu consommatrice en temps de calcul. Pour ces raisons, nous choisissons d'implémenter un algorithme de Gauss-Newton pour l'estimation d'orbite et une transformation non-parfumée pour l'association de nouvelles observations quand une orbite est disponible. L'adaptation de ces méthodes au cas des objets en orbite est décrite au Chapitre 7.

Le catalogage nécessite d'implémenter ces méthodes dans un algorithme de pistage multicible. En termes de complexité combinatoire, les algorithmes de pistage multicible présentés sont sensiblement équivalents : dans tous les cas en effet, on quantifie la corrélation de chaque piste existante avec chaque nouvelle observation, que ce soit dans le but de les combiner dans une moyenne pondérée (algorithmes bayésiens) ou de prendre une décision tranchée d'association d'observation à piste (algorithmes non-bayésiens). Ces algorithmes reposent également tous sur une certaine perte d'optimalité pour assurer leur faisabilité. La première perte d'optimalité résulte de l'utilisation d'une fonction de fenêtrage, ce qui permet en effet de réduire le jeu de nouvelles observations pour chaque piste. La seconde perte d'optimalité évidente réside dans la suppression de pistes, qui permet d'une part de réduire le nombre de calculs de corrélation entre pistes et observations nécessaires et d'autre part d'obtenir des tables ou matrices d'association de taille raisonnable.

Le choix d'un algorithme pour l'implémentation d'une fonction de catalogage d'objets spatiaux s'oriente vers le TO-MHT. Cette méthode non-bayésienne hérite du principe du HO-MHT dans le sens où elle permet de retarder une décision d'association tant que l'information disponible n'est pas suffisante, ce qui est un avantage important étant donné que les objets spatiaux sont observés par un capteur dont l'emprise est restreinte et génère des pistes dont on ne peut initialement déterminer l'orbite (état) avec précision. Le TO-MHT hérite également du caractère explicite de la méthode par programmation entière du fait qu'elle se concentre sur le traitement direct des pistes quitte à recalculer une solution globale à chaque itération pour les traiter dans leur ensemble. En permettant l'insertion facile de blocs de traitement des pistes, le TO-MHT fait preuve d'une grande adaptabilité.

Les algorithmes de pistage multicible permettent de gérer des pistes en s'appuyant

sur des fonctions élémentaires d'association d'observation et d'estimation d'état. Cependant, les algorithmes décrits font l'hypothèse de pistes initialisées alors que par définition, une observation isolée ne permet pas de définir une orbite, et donc d'initialiser une piste. L'initialisation du pistage pour les objets spatiaux fait donc l'objet du chapitre suivant.



# Chapitre 5

## Détermination d'orbite préliminaire

L'initialisation d'une piste pour décrire la trajectoire d'un objet spatial est une difficulté majeure dans le cas d'observations isolées pour des raisons de non-observabilité de l'orbite compte tenu du peu d'information acquis à chaque traversée. Dans ce chapitre, nous présentons les méthodes classiques de calcul d'orbite à partir d'observations de position dans le but de cerner précisément les lacunes de l'état de l'art en termes d'initialisation de piste dans le cas d'observations isolées.

Dans un premier temps, nous situons la Détermination d'Orbite Initiale (Initial Orbit Determination, IOD) dans le processus de pistage et identifions plus précisément la difficulté de la première association d'observations. Ensuite, quatre méthodes classiques pour l'IOD sont présentées ainsi que la seule tentative publiée à ce jour pour traiter le problème de catalogage de petits débris spatiaux par observations isolées.

### Sommaire

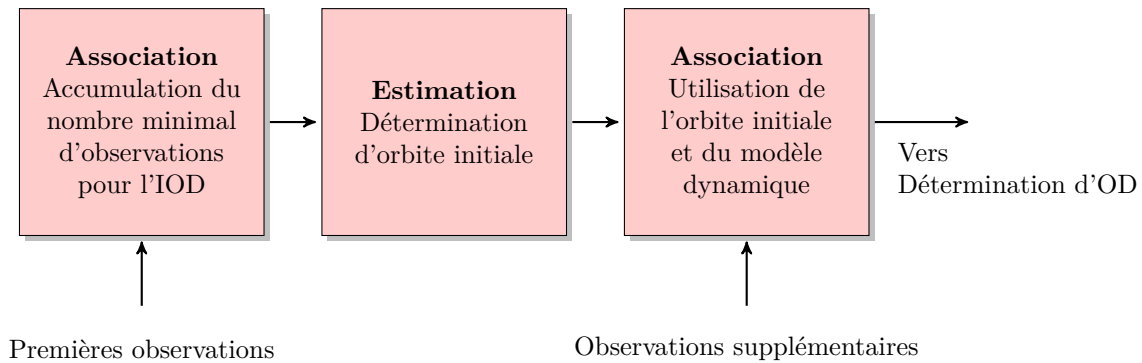
---

<b>5.1</b>	<b>Problématique de la Détermination d'Orbite Initiale . .</b>	<b>62</b>
<b>5.2</b>	<b>Trois observations de position . . . . .</b>	<b>63</b>
5.2.1	Méthode de Gibbs . . . . .	63
5.2.2	Méthode de Herrick-Gibbs . . . . .	64
<b>5.3</b>	<b>Deux observations de position . . . . .</b>	<b>65</b>
5.3.1	Méthode de Gauss . . . . .	66
5.3.2	Méthode de Battin et révolutions multiples . . . . .	67
<b>5.4</b>	<b>Méthode des débris virtuels (Virtual Debris) . . . . .</b>	<b>68</b>
5.4.1	Principe . . . . .	68
5.4.2	Résultats publiés . . . . .	69
<b>5.5</b>	<b>Insuffisance des techniques existantes . . . . .</b>	<b>70</b>
5.5.1	Pour l'association initiale . . . . .	70
5.5.2	Pour la Détermination d'Orbite Initiale (IOD) . . . . .	71
<b>5.6</b>	<b>Conclusion du chapitre . . . . .</b>	<b>71</b>

---

## 5.1 Problématique de la Détermination d'Orbite Initiale

Le cycle Association-Estimation décrit dans la Section 4.3 est valable lors de la mise-à-jour des pistes mais également lors de leur initialisation. Naturellement, il est nécessaire d'accumuler des observations (étape d'association) avant de pouvoir calculer une orbite (étape d'estimation). La Détermination d'Orbite Initiale (IOD) est le premier calcul d'orbite, souvent effectué à partir d'un nombre d'observations réduit. Quand davantage d'observations deviennent disponibles, on effectue un calcul d'Orbite Définitive (Definitive Orbit, DO) pour raffiner la connaissance de l'orbite à partir de l'Orbite Initiale (Initial Orbit, IO) et d'observations nouvellement acquises [47, 29, 48].



**Figure 5.1** – L'IOD nécessite d'avoir associé un nombre suffisant d'observations. Les autres observations ont été associées au préalable ou sont associées par la suite grâce à l'orbite initiale et au modèle dynamique.

Les méthodes classiques d'IOD telles que la méthode de Gibbs et celle de Herrick-Gibbs peuvent être utilisées pour calculer une orbite à partir de trois observations de position issues d'un arc de trajectoire de longueur suffisante (capteur à large emprise). Par opposition, les méthodes de résolution du problème de Lambert<sup>1</sup> nécessitent seulement deux observations de position qui peuvent être éloignées spatialement et dans le temps. Dans les deux cas, la quantité recherchée et le vecteur vitesse associé à l'une des positions connues.

Ces méthodes supposent alors :

- des observations correctement associées,
- un bruit d'observation faible ou nul.

On comprend alors que les méthodes d'IOD ne répondent pas au problème d'association initiale et que les sorties de ces algorithmes peuvent être imprécises en raison du bruit d'observation qui génère de la redondance entre deux observations spatialement proches. L'IOD reste cependant une étape essentielle pour le pistage d'objets spatiaux.

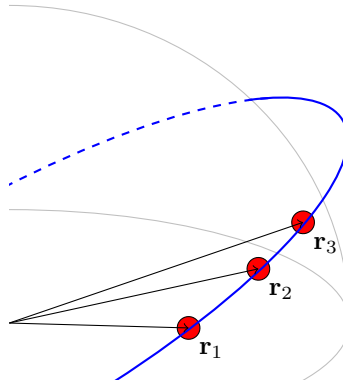
Dans ce qui suit, nous présentons deux méthodes d'IOD à partir de trois observations

1. Résoudre le problème de Lambert consiste à relier deux positions par une orbite de transfert.

de position ainsi que deux méthodes de résolution du problème de Lambert dont une version permet de traiter le cas d'observations à une ou plusieurs révolutions d'intervalle.

## 5.2 Trois observations de position

Les méthodes de Gibbs et de Herrick-Gibbs sont couramment utilisées pour l'IOD [49]. Ces méthodes font l'hypothèse de trois observations de position  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  et  $\mathbf{r}_3$ , coplanaires dans un référentiel ECI. Compte tenu du bruit d'observation, une certaine erreur de coplanarité doit être admise. Les vecteurs sont supposés être également relativement proches spatialement et temporellement, c'est-à-dire en général issues d'une même traversée d'un objet dans le FOR du capteur. Le bruit d'observation pouvant être important avec notre capteur, la précision de l'orbite initiale obtenue est fortement dégradée, et ce d'autant plus que la proximité spatiale des observations bruitées implique une perte d'information (redondance).



**Figure 5.2** – Trois observations de position datées permettent le calcul d'une orbite initiale. La précision de cette orbite dépend de la configuration du triplet d'observations (distances relatives, bruit d'observation, *etc.*).

### 5.2.1 Méthode de Gibbs

La méthode de Gibbs est une méthode purement géométrique inspirée de la méthode de Gauss (non-détaillée dans ce document, *cf.* [24]) pour l'IOD à partir de trois lignes de visées (deux angles sans mesure de distance obtenues en général par des observations au télescope). L'objectif de cette méthode est le calcul d'un vecteur-vitesse  $\mathbf{v}$  associé à un vecteur-position  $\mathbf{r}$ . Le couple position-vitesse  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  obtenu permet de remonter aux éléments orbitaux grâce au formulaire de l'Annexe C.

Les trois vecteurs position  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  et  $\mathbf{r}_3$  sont supposés coplanaires, avec une certaine tolérance compte tenu du bruit d'observation. La première loi de Kepler permet de déduire l'expression d'un vecteur-vitesse associé à un vecteur-position :



$$\mathbf{v} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{ND}} \left( \mathbf{S} + \frac{\mathbf{D} \wedge \mathbf{r}}{r} \right) \quad (5.1)$$

où les trois vecteurs  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{S}$  (de normes  $N$ ,  $D$  et  $S$ , respectivement) sont définis tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= r_3 \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 + r_1 \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3 + r_2 \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{D} &= \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{S} &= (r_2 - r_3) \mathbf{r}_1 + (r_3 - r_1) \mathbf{r}_2 + (r_1 - r_2) \mathbf{r}_3 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ce résultat impose que les observations soient séquentielles, c'est-à-dire que l'on connaît leur ordre temporel (même si l'on n'utilise pas directement leurs dates). L'ambiguïté sur le signe de  $\mathbf{v}$  se résout alors trivialement.

On retrouve alors les valeurs des paramètres orbitaux képlériens classiques par le formulaire (C.1)-(C.6). Accessoirement, le vecteur excentricité  $\mathbf{e}$  (vecteur de norme  $e$  qui pointe vers le périégée) est directement accessible par  $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{S} \wedge \mathbf{N}}{SD}$ .

La méthode de Gibbs étant purement géométrique, elle est préférée quand les trois observations sont réparties sur un arc relativement grand, car des angles trop faibles entre les vecteurs-position conduisent à des produits vectoriels quasi-nuls et sujets aux erreurs numériques. Dans la littérature [22], on évoque une limite empirique de  $1^\circ$  en termes d'angle minimal entre les vecteurs d'observation (cela est également conditionné par la précision des mesures).

Par ailleurs, la coplanarité des vecteurs-position utilisés peut se mesurer par un angle  $\alpha_{\text{coplanaire}}$  défini par l'équation (5.3), auquel on impose en général d'être inférieur à  $3^\circ$  pour la pertinence du résultat.

$$\alpha_{\text{coplanaire}} = 90^\circ - \arccos \frac{\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3\| \|\mathbf{r}_1\|} \quad (5.3)$$

## 5.2.2 Méthode de Herrick-Gibbs

À l'instar de la méthode de Gibbs, la méthode de Herrick-Gibbs permet de calculer le vecteur-vitesse  $\mathbf{v}_2$  à partir de trois positions datées  $\{(t_1, \mathbf{r}_1), (t_2, \mathbf{r}_2), (t_3, \mathbf{r}_3)\}$  avec  $t_1 < t_2 < t_3$ . Cette méthode repose sur un principe analytique : elle fait appel à un développement limité de vecteurs position  $\mathbf{r}(t)$  fonction du temps, ce qui implique des observations rapprochées dans le temps dans la mesure où le bruit d'observation le permet.

En partant d'un développement en série de Taylor du vecteur-position  $\mathbf{r}(t)$  de l'objet considéré autour de  $t_2$  à l'ordre 4, évalué en  $\mathbf{r}_1$  et en  $\mathbf{r}_3$ , on aboutit au système d'équations (5.4)-(5.5).

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2' \Delta t_{12} + \frac{1}{2} \mathbf{r}_2'' \Delta t_{12}^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{r}_2^{(3)} \Delta t_{12}^3 + \frac{1}{4!} \mathbf{r}_2^{(4)} \Delta t_{12}^4 + \mathcal{O}(\Delta t_{12}^4) \quad (5.4)$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2' \Delta t_{32} + \frac{1}{2} \mathbf{r}_2'' \Delta t_{32}^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{r}_2^{(3)} \Delta t_{32}^3 + \frac{1}{4!} \mathbf{r}_2^{(4)} \Delta t_{32}^4 + \mathcal{O}(\Delta t_{32}^4) \quad (5.5)$$

avec  $\Delta t_{12} = t_1 - t_2$  et  $\Delta t_{32} = t_3 - t_2$ . En manipulant ces équations et en utilisant l'équation du problème à deux corps  $\mathbf{r}'' = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}$ , on peut démontrer que  $\mathbf{v}_2$  s'exprime tel que :

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{r}'_2 = \alpha \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2 + \gamma \mathbf{r}_3 \quad (5.6)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont fonction de  $\Delta t_{12}$ ,  $\Delta t_{13}$ ,  $\Delta t_{23}$  et de  $\mu$  :

$$\alpha = -\Delta t_{32} \left( \frac{1}{\Delta t_{21}\Delta t_{31}} + \frac{\mu}{12r_1^3} \right) \quad (5.7)$$

$$\beta = (\Delta t_{32} - \Delta t_{21}) \left( \frac{1}{\Delta t_{21}\Delta t_{32}} + \frac{\mu}{12r_2^3} \right) \quad (5.8)$$

$$\gamma = \Delta t_{21} \left( \frac{1}{\Delta t_{32}\Delta t_{31}} + \frac{\mu}{12r_3^3} \right) \quad (5.9)$$

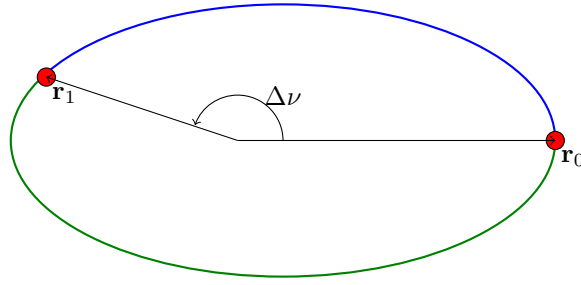
À partir du couple  $\{\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2\}$ , on peut calculer les paramètres orbitaux képlériens classiques d'après le formulaire (C.1)-(C.6).

L'utilisation de développements limités autour de  $t_2$  implique des observations très rapprochées dans le temps pour que l'approximation négligeant les termes  $\mathcal{O}(\Delta t_{12}^4)$  et  $\mathcal{O}(\Delta t_{32}^4)$  soit valable. La méthode de Herrick-Gibbs est donc complémentaire dans son domaine d'application à la méthode de Gibbs. Dans [24], des études de cas démontrent que la méthode de Gibbs est plus précise quand les vecteurs-position forment des angles supérieurs à  $5^\circ$  tandis que la méthode de Herrick-Gibbs est plus précise quand ces mêmes angles sont inférieurs à  $1^\circ$ . Pour des écarts angulaires compris entre  $1^\circ$  et  $5^\circ$ , ces deux méthodes montrent des performances comparables.

### 5.3 Deux observations de position

On appelle le “problème de Lambert” le problème de déterminer une orbite reliant une position initiale  $\mathbf{r}_0$  à une position finale  $\mathbf{r}_1$  en un temps  $\Delta t$ . Résoudre ce problème nécessite de faire des hypothèses supplémentaires. En effet, deux positions peuvent être reliées par une infinité d'orbites képlériennes et un nombre de révolutions maximal entre les deux positions doit être fixé.

La méthode de Gauss [50] est une méthode de résolution classique. Elle consiste à déterminer de manière numérique (itérations) un rapport d'aires  $y$  dont on déduit le vecteur vitesse  $\mathbf{v}_0$  associé à la position initiale  $\mathbf{r}_0$ . Pour le cas où plusieurs révolutions sont possibles entre les deux positions, la méthode de Battin est une des méthodes les plus courantes. D'autres méthodes visant à s'affranchir des contraintes liées à la méthode de Gauss (notamment la condition de non-colinéarité) existent (par exemple, la méthode de Thorne [51]) mais ne sont pas décrites dans ce document car elles conservent les mêmes lacunes que les méthodes classiques pour notre problème particulier, c'est-à-dire que le bruit de mesure n'est pas pris en compte et que le coût de calcul n'est pas allégé.



**Figure 5.3** – La résolution du problème de Lambert pour l’IOD consiste à déterminer une orbite reliant deux positions en un temps donné. En général, plusieurs solutions sont possibles en particulier quand on admet que l’objet a pu effectuer plusieurs révolutions. Dans le cas où l’objet effectue moins d’une révolution, on peut trouver deux solutions (sauf cas particulier où les vecteurs-position sont colinéaires).

### 5.3.1 Méthode de Gauss

La méthode de Gauss pour résoudre le problème de Lambert s’appuie sur une expression du semi-paramètre  $p$  (avec les paramètres képlériens présentés au Chapitre 3 :  $p = a(1 - e^2)$ ), fonction de l’angle formé par  $\mathbf{r}_0$  et  $\mathbf{r}_1$ , les normes de ces deux vecteurs ainsi que sur la différence d’anomalie excentrique  $\Delta E$ . La connaissance du semi-paramètre  $p$  permet de remonter aux vitesses associées à  $\mathbf{r}_0$  et  $\mathbf{r}_1$ . Tout le problème revient donc à la résolution de cette équation, dont les inconnues sont  $p$  et  $\Delta E$  :

$$p = \frac{2r_0r_1 \sin^2(\Delta\nu/2)}{r_0 + r_1 - 2\sqrt{r_0r_1} \cos(\Delta\nu/2) \cos(\Delta E/2)} \quad (5.10)$$

Des techniques plus ou moins classiques sont disponibles pour résoudre cette équation. Dans [24], le rapport  $y$  de l’aire balayée par le vecteur-position entre  $\mathbf{r}_0$  et  $\mathbf{r}_1$  et de l’aire du triangle formé par ces deux mêmes vecteurs est utilisé. Une expression de ce rapport peut se déduire de la loi des aires :

$$y = \frac{\sqrt{\mu p} \Delta t}{r_0 r_1 \sin \Delta\nu} \quad (5.11)$$

En y injectant l’expression (5.10), on obtient :

$$y^2 = \frac{\mu \Delta t^2 \cos^{-2}(\Delta\nu/2)}{2r_0r_1 \left( r_0 + r_1 - 2\sqrt{r_0r_1} \cos(\Delta\nu/2) \cos(\Delta E/2) \right)} \quad (5.12)$$

où nous rappelons que  $\Delta E$  désigne la différence des anomalies excentriques (cf. Chapitre 3). L’équation (5.12) peut alors s’écrire sous une forme plus classique :

$$y^2 = \frac{m}{l + x_1}, \text{ avec } \begin{cases} l &= \frac{r_0 + r_1}{4\sqrt{r_0r_1} \cos(\Delta\nu/2)} - \frac{1}{2} \\ m &= \frac{\mu \Delta t^2}{(2\sqrt{r_0r_1} \cos(\Delta\nu/2))^3} \\ x_1 &= \sin^2(\Delta E/4) \end{cases} \quad (5.13)$$

Dans [50], il est démontré l'utilité d'une quantité  $x_2$  particulière, qui admet un développement en série entière de  $x_1$  pour  $\Delta\nu < 90^\circ$  :

$$x_2 = \frac{\Delta E - \sin \Delta E}{\sin^3(\Delta E/2)} = \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{6}{5} x_1 + \frac{6 \times 8}{5 \times 7} x_1^2 + \frac{6 \times 8 \times 10}{5 \times 7 \times 9} x_1^3 + \dots \right) \quad (5.14)$$

et qui vérifie de plus :

$$y^3 - y^2 = m x_2 \quad (5.15)$$

En injectant l'équation (5.13) dans l'équation (5.15), on obtient :

$$y = (l + x_1)x_2 + 1 \quad (5.16)$$

En partant d'une valeur arbitraire  $y = 1$ , on peut calculer des valeurs de  $x_1$  grâce à l'équation (5.13), puis de  $x_2$  grâce à l'équation (5.14), puis de  $y$  grâce à l'équation (5.16) et ce de manière itérative, ce qui permet de converger vers une valeur estimée de  $y$  (substitutions successives). On peut alors calculer  $p$  par l'équation (5.11), puis le vecteur-vitesse  $\mathbf{v}_0$  associé à  $\mathbf{r}_0$  :

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{r}_1 - f\mathbf{r}_0}{g}, \text{ avec } \begin{cases} f = 1 - \frac{r_1}{p}(1 - \cos \Delta\nu) \\ g = \frac{r_1 r_0 \sin \Delta\nu}{\sqrt{\mu p}} \end{cases} \quad (5.17)$$

Les quantités  $f$  et  $g$  sont issues d'une méthode de propagation particulière, détaillée dans [24].

D'autres méthodes de résolution sont disponibles dans la littérature. Cependant, elles nécessitent toutes une résolution numérique (boucle d'itérations) ce qui implique un coût de calcul plus important.

### 5.3.2 Méthode de Battin et révolutions multiples

La méthode de Battin [52] permet de résoudre un problème de Lambert de manière plus robuste en reformulant les équations (5.13) et (5.15), de manière à déplacer la singularité en  $\Delta\nu = \pi$  de la méthode de Gauss à  $\Delta\nu = 2\pi$ . Les équations en  $y$  deviennent :

$$\begin{cases} y^2 = \frac{m}{(l+x)(1+x)} \\ y^3 - y^2 = m \frac{\Delta E - \sin \Delta E}{4 \tan^3(\Delta E/2)} \end{cases} \quad (5.18)$$

où  $l = \tan^2 \frac{\Delta\nu}{2}$ ,  $m = \frac{\mu \Delta t^2}{8r_{0,p}^3}$  et  $x = \tan^2 \frac{\Delta E}{2}$ . La grandeur  $r_{0,p}$  est introduite par Battin comme étant la moyenne entre le demi-grand axe de l'ellipse d'excentricité minimale et de la longueur du segment entre le foyer (de cette ellipse) et sa projection orthogonale sur la corde reliant les deux positions observées. Après une résolution par substitutions successives de ce système d'équations (de manière analogue à la résolution par méthode de Gauss), les vitesses aux positions observées peuvent être

retrouvées. Le détail du calcul permettant d'arriver à cette formulation est disponible en [24].

Cette formulation est particulièrement intéressante car elle s'étend aux cas de révolutions multiples [53]. En effet, si  $N$  est le nombre de révolutions entre  $\mathbf{r}_0$  et  $\mathbf{r}_1$ , on peut reformuler le système d'équations (5.18) tel que :

$$\begin{cases} y^2 &= \frac{m}{(l+x)(1+x)} \\ y^3 - y^2 &= m \frac{N\pi + \Delta E - \sin \Delta E}{4 \tan^3(\Delta E/2)} \end{cases} \quad (5.19)$$

où  $N$  est le nombre de révolutions autorisé. Pour chaque valeur de  $N$ , le système d'équations a deux solutions. Il compte alors  $2N + 1$  solutions au total (on retrouve les équations originales de Battin pour  $N = 0$ , ce qui mène à une solution unique), que l'on peut obtenir par substitutions successives et par substitutions successives inverses. En effet, la méthode par substitutions successives mentionnée précédemment permet de converger vers une solution unique (point attractif), tandis que dans le cas où  $N > 0$ , l'autre solution existante constitue un point répulsif. L'inversion des substitutions successives a pour effet de faire de l'autre solution un point attractif à la condition que la valeur initiale soit correctement choisie.

## 5.4 Méthode des débris virtuels (Virtual Debris)

Les méthodes d'IOD que nous évoquons dans les sections précédentes fournissent une orbite initiale à partir d'observations de position associées au préalable. Dans un contexte de trajectographie d'astéroïdes, la méthode des régions admissibles a été développée : elle consiste à définir les énergies possibles d'un astéroïde à partir d'une observation par un télescope. Cette méthode a été par la suite adaptée au cas du catalogage de petits débris spatiaux en orbite géostationnaire par observations optiques sur des arcs courts [54]. Les auteurs soutiennent que cette méthode est adaptable aux catalogage des objets en LEO grâce à des télescopes ou encore grâce à des radars à champ réduit. Il est donc indispensable de faire le point sur cette méthode dans cette thèse.

### 5.4.1 Principe

L'algorithme des débris virtuels fait l'hypothèse qu'on est capable de mesurer quatre grandeurs dans un repère terrestre topocentrique inertiel lors d'une observation : deux angles  $(\alpha, \delta)$  et leurs dérivées  $(\dot{\alpha}, \dot{\delta})$  dans le cas du télescope électro-optique, deux angles  $(\alpha, \delta)$ , la distance et sa dérivée  $(\rho, \dot{\rho})$  dans le cas du radar. Une observation renseigne alors sur quatre paramètres mécaniques et l'on cherche à en déterminer deux autres dans le but d'en déduire une orbite. Cette approche a été motivée notamment par la mise en œuvre d'un capteur électro-optique fournissant de telles mesures à l'observatoire du Teide (ESA Optical Ground Station). Dans la suite de ce document, nous décrivons le principe de la version destinée aux systèmes

radars.

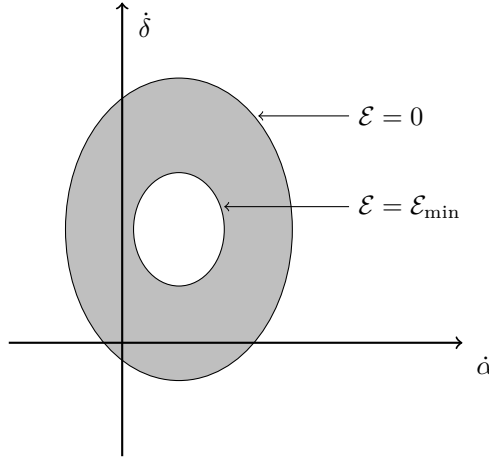
Le principe de la méthode repose sur la détermination d'une "région admissible" pour les paramètres d'observation manquants, *i.e.* le domaine possible dans le plan  $(\dot{\alpha}, \dot{\delta})$  dans le cas du radar, en s'appuyant sur une expression de l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  sous la contrainte  $\mathcal{E}_m < 0$  (système lié). L'ensemble des valeurs du couple  $\{\dot{\alpha}, \dot{\delta}\}$  vérifie :

$$\mathcal{E}_m(\dot{\alpha}, \dot{\delta}) = z_1 \dot{\alpha}^2 + z_2 \dot{\delta}^2 + z_3 \dot{\alpha} + z_4 \dot{\delta} + z_5 \leq 0 \quad (5.20)$$

où les coefficients  $z_i$  sont fonction des grandeurs connues. Le domaine des valeurs de  $\{\dot{\alpha}, \dot{\delta}\}$  possibles est donc défini par la condition :

$$\mathcal{E}_{m,\min} \leq \mathcal{E}_m(\dot{\alpha}, \dot{\delta}) \leq 0 \quad (5.21)$$

où  $\mathcal{E}_{m,\min}$  est défini par une valeur de demi-grand axe minimal  $a_{\min}$ . La région recherchée est donc bornée par deux ellipses concentriques d'équations  $\mathcal{E}_m(\dot{\alpha}, \dot{\delta}) = \mathcal{E}_{m,\min}$  et  $\mathcal{E}_m(\dot{\alpha}, \dot{\delta}) = 0$ .



**Figure 5.4** – La région recherchée est bornée par deux ellipses concentriques. Cette région est ensuite échantillonnée pour pallier le manque d'information disponible, puis propagée dans le but d'associer une seconde observation.

Une fois le domaine réduit autant que possible par la prise en compte de contraintes supplémentaires (les trajectoires balistiques sont exclues, *etc.*), on l'échantillonne et on calcule l'orbite liée à chaque nœud. Chaque nœud représente alors un "débris virtuel" propagé dans l'espoir d'être corrélé avec une autre observation.

## 5.4.2 Résultats publiés

La version "optique" de cette méthode a été testée sur des données issues de capteurs optiques et les résultats présentés et publiés dans [55] et [56]. Bien que ses auteurs

soutiennent l’adaptabilité de cette méthode de cas du radar, aucune étude n’a été conduite pour le prouver.

Cette méthode a été testée une première fois sur les données issues de la campagne d’acquisition du système ESA Optical Ground Station (ESAOGS) menée en 2007 sur les GEO et a permis de déterminer 109 orbites à partir de 3172 observations 4-D isolées (pas de vérité terrain).

Une deuxième étude est disponible dans [57], et présente les résultats de l’application de la méthode des débris virtuels sur les données issues du même télescope en 2007, acquis sur une durée de 81 nuits. Sur 3177 observations isolées, 1503 ont été corrélées (pas de vérité terrain).

## 5.5 Insuffisance des techniques existantes

### 5.5.1 Pour l’association initiale

La méthode des “Débris Virtuels” est une approche intéressante proposée dans [58, 57]. Elle permet à partir d’une unique observation de générer des particules sur les dimensions non-mesurées de l’espace d’observation afin de combler la méconnaissance de certaines composantes du vecteur d’état.

La pertinence de cette méthode au cas d’un radar monostatique n’a pas été pleinement étudiée bien que l’idée d’une mesure à 4 dimensions ait été évoquée dans [58, 57]. Or, il semble difficile de mesurer conjointement une distance et une vitesse radiale du fait de contraintes en temps et en puissance liées au fonctionnement du capteur. Les équations montrées dans [58] ne sont donc pas valides dans les hypothèses de cette étude.

Dans son principe, cette méthode comble le manque d’information disponible dans chaque observation isolée par la génération de particules que l’on propage par la suite (cette méthode s’apparente donc aux méthodes de filtrage particulaire). La généralité de cette méthode est plus ou moins préservée selon l’information *a priori* que l’on inclut dans la définition de la région “admissible” à échantillonner (par l’exemple un critère sur l’altitude du péri-gée). En revanche, la complexité algorithmique n’a pas été évaluée et pourrait être une faiblesse : générer et gérer (c’est-à-dire propager et corrélérer) des particules est en général une approche lourde et pourrait ne pas permettre d’associations efficaces (c’est-à-dire avec une ambiguïté faible) dans ce cas particulier. En effet, si deux observations quelconques permettent de déduire une ou plusieurs orbites dont les paramètres respectent les mêmes critères que ceux utilisés dans la définition de la région admissible, alors cette association est valide. Le nombre d’orbites valides résultant de l’application de cette méthode doit alors être estimé pour mesurer ses performances en termes de coût de calcul.

### 5.5.2 Pour la Détermination d'Orbite Initiale (IOD)

La complexité de la méthode d'IOD est un facteur important compte tenu notamment du bruit d'observation. En effet, le capteur dont nous faisons l'hypothèse implique que les observations peuvent être très proches dans un repère inertiel. Le bruit d'observation peut alors conduire, dans un nombre important de cas, à des résultats inexploitable. Cette difficulté peut être palliée par l'utilisation de particules (méthode de Monte-Carlo) qui consistent alors à déterminer une orbite grâce à une technique classique pour  $n$  paires ou triplets d'observations issus d'un tirage aléatoire sur chaque volume d'incertitude des observations disponibles dans le but de construire une distribution statistique dans l'espace des orbites.

Il faut donc résoudre le problème  $n$  fois pour chaque jeu d'observations disponible pour prendre en compte l'influence du bruit d'observation. Pour les méthodes de type Lambert en particulier, cela est très coûteux en temps de calcul car ces méthodes impliquent une ou plusieurs boucles de substitutions successives pour la convergence de certains paramètres à estimer pour le calcul d'orbite. Disposer d'une méthode d'IOD moins coûteuse permettrait alors de compenser la lourdeur d'une méthode de Monte-Carlo pour prendre en compte le bruit d'observation et faciliterait l'estimation d'orbite initiale.

## 5.6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons fait l'état des algorithmes de Détermination d'Orbite Initiale (IOD) les plus courants qui prennent en entrée des mesures de position. Quand trois observations de position sont disponibles, les méthodes de Gibbs ou de Herrick-Gibbs fournissent une solution directe sous certaines conditions : les observations doivent être relativement proches dans le temps, ne pas être colinéaires, être coplanaires avec le centre de masse de la Terre et peu bruitées. Quand seulement deux observations de position sont disponibles, alors la résolution du problème de Lambert associée demande un effort de calcul plus important : une résolution numérique faisant appel à une ou plusieurs boucles de substitutions successives est systématiquement utilisée dans les algorithmes que nous avons évoqués. Enfin, quand une unique observation de position est disponible, l'algorithme des "débris virtuels" peut éventuellement fournir une solution dans le cas d'observations optiques isolées pour les orbites géostationnaires mais n'a cependant jamais été testé pour des observations radars isolées d'objets en orbite basse.

Les algorithmes présentés dans ce chapitre souffrent alors de limitations importantes : les contraintes d'utilisation sont fortes pour les méthodes de Gibbs ou de Herrick-Gibbs, le coût de calcul est important pour les méthodes de type Battin et la méthode des débris virtuel demanderait de grandes capacités calculatoires pour le calcul de régions admissibles et leur propagation sans pour autant fournir de résultats probants. Dans tous les cas, le bruit d'observation n'est pas pris en compte.

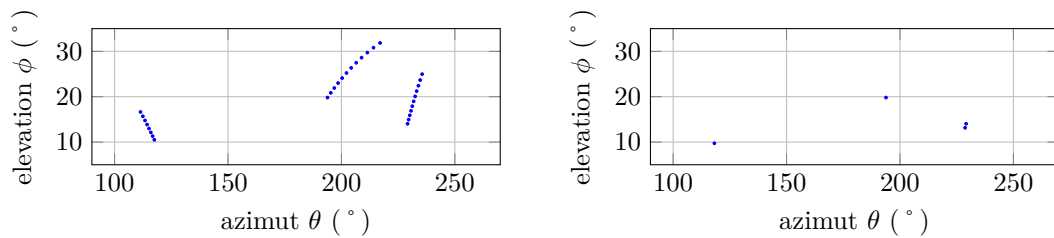




# Conclusion de la deuxième partie

Le maintien d'un catalogue d'objets en orbite basse peut se traiter par les méthodes existantes car il s'agit d'associer de nouvelles observations à des orbites précises et de mettre à jour ces orbites. La littérature sur ce sujet (pistage multicible, mise-à-jour de pistes) est abondante contrairement à la littérature traitant de l'initialisation de piste. L'initialisation de pistes est relativement simple quand on dispose d'un capteur dont le champ de veille est de grande emprise car des fonctions de type "chaînage de plots" [59] peuvent en général être appliquées le temps qu'une valeur du vecteur d'état soit disponible. L'initialisation du pistage par observations isolées est en revanche problématique car il est difficile d'associer les observations nécessaires à la Détermination d'Orbite Initiale (IOD) quand la densité de détection est élevée et que les observations d'un même objet se font à des intervalles de temps longs (1h) voire très longs (10h-24h). Cela peut en effet impliquer une complexité combinatoire exponentielle nécessitant une puissance de calcul inaccessible.

En effet pour la détermination d'orbite initiale, les méthodes de Gibbs et de Herrick-Gibbs sont analytiques et requièrent l'association préliminaire de trois observations tandis que la méthode de Battin fait appel à des substitutions successives pour obtenir des solutions à partir de deux observations. Faute de méthode permettant l'association préliminaire des observations nécessaires à ces méthodes, la problématique d'initialisation de piste reste ouverte dans le cas des observations isolées.



**Figure 5.5** – Exemple d'observations simulées de l'objet "THOR ABLESTAR DEB" présent dans le catalogue Space-Track par un capteur à large champ de veille (gauche) et par un capteur à champ de veille étroit (droite). Ces observations sont accumulées sur une période de 9 heures dans un référentiel topocentrique sphérique East-North-Up (*cf.* Chapitre 3). Aucune fausse alarme n'a été ajoutée. Aucun bruit de mesure n'a été ajouté. La mesure en distance n'est pas représentée.



## Troisième partie

Traitement des observations issues  
d'un radar à champ de veille  
restreint pour le catalogage de  
petits débris



# Positionnement

De manière générale, de nombreux critères de performance peuvent intervenir dans une fonction de catalogage comme par exemple la couverture, le coût de calcul, la précision ou encore la réactivité :

- La couverture est définie dans notre cas par la proportion d’objets catalogables par le système,
- Le coût de calcul impacte essentiellement la faisabilité du système (c’est-à-dire que la puissance de calcul requise peut être très difficile à mettre en œuvre voire inatteignable). Cependant, les ressources informatiques sont actuellement et en général de moindre coût par comparaison aux composants du capteur physique, ce qui incite à chercher un compromis visant à renforcer les contraintes sur le traitement de données afin de relâcher les contraintes sur le capteur physique,
- La précision des orbites calculées influence la fréquence d’observation nécessaire pour ne pas perdre un objet et assurer la fonction de catalogage mais également la qualité de produits dérivés du catalogue. Par exemple, l’imprécision des orbites issues d’un catalogue tel que Space-Track nécessite en général la mise en œuvre de moyens complémentaires pour l’alerte anti-collision,
- La réactivité est définie par la latence entre l’instant où un nouvel objet est présent en orbite et l’instant où il est catalogué.

Nous supposons dans cette étude que les débris spatiaux sont sur des orbites proches des satellites existants. Il s’agit donc de couvrir l’ensemble des orbites basses sachant que la majorité des objets à cataloguer ont une forte inclinaison et une faible excentricité en général (*cf.* Chapitre 3).

Le coût de calcul est un élément critique dans notre cas : l’impossibilité de calculer un vecteur d’état complet à partir d’une seule traversée du champ de veille implique une complexité combinatoire importante et porte l’essentiel du problème de catalogage par observations isolées sur les premières associations d’observations à moyen et long terme (intervalles de temps de l’ordre de l’heure ou de la dizaine d’heures) pour l’initialisation du pistage de chaque objet. En effet, le nombre d’associations d’observations possibles est très grand : sans méthode heuristique efficace, il faudrait envisager  $C_N^2$  (2 parmi  $N$ ) ou  $C_N^3$  (3 parmi  $N$ ) cas à tester, où  $N$  désigne le nombre d’observations accumulées sur un intervalle de temps suffisamment grand pour que l’on puisse y trouver deux ou trois observations issues de chaque objet.

Dans le cas du capteur défini au Chapitre 2 (revisite de 10 s et taux de fausse alarme de 1 FA/s) et d’environ 11 000 objets en orbite basse, on obtient environ 20 observations par scan. Si l’on considère que tous les objets présents passent dans le champ

de veille deux ou trois fois en 24 heures, alors il faut tester  $C_{172800}^2$  (de l'ordre de  $1,5 \cdot 10^{10}$ ) ou  $C_{172800}^3$  (de l'ordre de  $8,6 \cdot 10^{14}$ ) possibilités. Dans le cas d'un nombre d'objets de l'ordre de 100 000, on atteint  $C_{8,7 \cdot 10^5}^3 = 1,1 \cdot 10^{17}$  hypothèses d'association à tester.

Tester l'exactitude d'un triplet d'observations de position requiert au moins 20 000 FLOP (FLoating point OPerations) sous des hypothèses extrêmement optimistes. Tester  $C_{8,7 \cdot 10^5}^3 = 1,1 \cdot 10^{17}$  triplets en 24h nécessite alors  $2,2 \cdot 10^{21}$  FLOP, soit  $2,5 \cdot 10^{16}$  FLOP/s en moyenne. Actuellement, une telle puissance informatique est loin d'être atteignable.

De longs intervalles de temps entre les observations issues d'un même objet peuvent cependant être bénéfiques : si l'on suppose que l'on sait associer des observations à long terme alors le filtrage du bruit d'observation est efficace car la dynamique orbitale est relativement déterministe si l'objet ne manœuvre pas. Cela permettrait alors de relâcher des contraintes de précision de mesure. En revanche, la nécessité d'associer des observations sur de longs intervalles de temps entraîne nécessairement une perte de réactivité. Cela est de moindre importance car nous avons fait l'hypothèse que d'autres capteurs existants permettraient de cataloguer les objets manœuvrants, de taille plus importante, pour nous concentrer sur les objets plus petits et non-manœuvrants. La question de la réactivité est en effet plus cruciale lorsque l'on s'intéresse à des missions de surveillance dans un contexte militaire.

Les travaux de cette thèse se concentrent par conséquent sur les méthodes d'association d'observations issues de mêmes objets à de longs intervalles de temps, sans connaissance *a priori* du vecteur d'état et en évitant le coût de calcul exponentiel qui résulterait du test de chaque association potentielle.

## Objectifs

Cette thèse se pose quatre objectifs en vue de proposer un nouvel algorithme de catalogage et d'en étudier la faisabilité.

### Proposer une nouvelle technique de première association peu ambiguë

L'association préalable de deux ou trois observations pour initialiser le pistage des objets en orbite est incontournable. Or, la méthode des Débris Virtuels, seule tentative publiée à ce jour, ne semble pas apporter de solution suffisante dans le cas d'observations radar au vu des analyses et résultats publiés par ses auteurs. Par conséquent, un autre moyen d'associer deux observations (dans un premier temps) tout en limitant la complexité combinatoire doit être trouvé.

### Proposer une méthode rapide de détermination d'orbite

Les observations radars sont en général de faible précision. Le bruit d'observation peut alors avoir un impact significatif sur la qualité de l'orbite calculée, en particulier

---

quand les observations sont spatialement proches. Or, la configuration de capteur choisie au Chapitre 2 ne permet d’observer les objets que sur de courtes portions d’orbites et impose alors de prendre en compte le bruit d’observation dans l’estimation d’orbite. Cela peut être fait par la génération de particules dans les volumes d’erreur des observations (méthode de type Monte-Carlo). Afin de compenser cette lourdeur, une méthode de détermination d’orbite de coût calculatoire adapté doit être élaborée.

### **Évaluer les techniques proposées dans un contexte multicible**

L’obstacle principal à la faisabilité d’un système de catalogage utilisant un champ de veille étroit (nappe fine) réside dans la complexité combinatoire induite par les observations isolées et une forte densité de détection. L’efficacité des méthodes d’initialisation proposées dans cette thèse doit alors être évaluée dans un contexte multicible afin de déterminer notamment le taux de couverture atteint en simulation, la robustesse à certains paramètres (tels que les performances en détection ou la précision de mesure) et la complexité combinatoire résultante.

### **Modéliser la complexité combinatoire**

La complexité combinatoire est évaluée pour des scénarios faisant intervenir quelques centaines d’objets (de 500 à 800 objets simulés). Or, la densité de détections réelle attendue serait bien plus élevée car on estime à plusieurs centaines de milliers le nombre de petits débris en orbite basse. Il est alors important d’essayer d’extrapoler les résultats obtenus à des scénarios plus complexes pour évaluer la faisabilité de l’algorithme à des densités de détections plus réalistes. Pour cela, nous nous fixons pour dernier objectif de modéliser les performances de l’algorithme de catalogage obtenu notamment en termes de complexité combinatoire. Cela permet par ailleurs d’identifier certains points de compromis ajustables en fonction de la présence ou non d’un second capteur.





# Chapitre 6

## Association initiale par modélisation comportementale

La Détermination d'Orbite Initiale (IOD) nécessite un jeu de deux ou trois observations préalablement associées. Dans le cas d'observations isolées, associer les premières observations n'est pas trivial car on ne peut pas calculer d'état (paramètres orbitaux) à partir de chaque observation pour les corrélérer entre elles.

Ce chapitre présente alors une nouvelle méthode pour l'association de deux observations isolées. Pour cela, nous caractérisons les paires d'observations à une révolution d'intervalle dans un espace de paramètres bien choisi à partir de données extraites du catalogue Space-Track. Il s'agit alors de mettre en œuvre un algorithme capable d'apprendre les particularités de ce "motif" (les paires d'observations à une révolution d'intervalle) pour ensuite le reconnaître en ligne et filtrer les paires d'observations peu vraisemblables. Cela permet d'associer une paire d'observations avec une ambiguïté d'association faible, c'est-à-dire que chaque observation initiale donne lieu à un nombre relativement faible de paires d'observations potentiellement issues du même objet et limite ainsi la complexité combinatoire.

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Paires d'observations à une révolution d'intervalle . . .</b>	<b>82</b>
6.1.1	Observations issues du capteur supposé . . . . .	83
<b>6.2</b>	<b>Discrimination des paires d'observations . . . . .</b>	<b>86</b>
6.2.1	Structure de l'algorithme résultant . . . . .	86
6.2.2	Base d'apprentissage . . . . .	87
6.2.3	Estimation du support par One-Class SVM . . . . .	88
6.2.4	Calcul d'un rapport de vraisemblance . . . . .	92
<b>6.3</b>	<b>Évaluation préliminaire des performances . . . . .</b>	<b>95</b>
6.3.1	Fenêtrage . . . . .	95
6.3.2	Score . . . . .	97
6.3.3	Rappel et ambiguïté obtenus par fenêtrage et SPRT . . .	98
<b>6.4</b>	<b>Conclusion du chapitre . . . . .</b>	<b>98</b>

---

## 6.1 Paires d'observations à une révolution d'intervalle

La connaissance du couple position-vitesse étant équivalente à la connaissance d'une orbite képlérienne (*cf.* Chapitre 3), il est évident qu'une unique observation de position est insuffisante pour déterminer tous les paramètres orbitaux permettant de décrire le mouvement d'un objet en orbite. Une approche triviale est de générer des particules dans l'espace des vitesses pour former un ensemble de vecteurs position-vitesse possibles. Cette approche est reprise par la méthode des “Débris Virtuels”, déjà largement évoquée dans ce document, qui permet un échantillonnage équivalent efficace en prenant en compte des éléments de mécanique orbitale. Chaque particule est alors propagée et éventuellement corrélée à de nouvelles observations.

L'approche proposée dans cette section est inverse : c'est à partir de paires d'observations particulières que l'on déduit une unique orbite (approchée et avec une certaine incertitude). La connaissance de cette orbite est alors suffisante, comme nous le prouvons au Chapitre 7, pour associer une troisième observation et initialiser le pistage. Il est donc question d'évaluer la corrélation de deux observations en contournant au mieux les considérations de mécanique orbitale (car cette voie a déjà été explorée par la méthode des Débris Virtuels). Cela revient à comparer deux observations de même nature (observations de position 3D), c'est-à-dire à analyser leur différence dans un repère donné. La différence, ou distance, entre deux observations peut prendre des valeurs quelconques si l'on ne considère aucun critère restrictif supplémentaire, c'est-à-dire qu'un très grand nombre de paires d'observations sont alors potentiellement corrélables (il est d'ailleurs possible que la méthode des Débris Virtuels tombe dans ce défaut). C'est pour cette raison que nous choisissons de nous intéresser à un sous-ensemble de paires d'observations dont nous prouverons qu'il permet une ambiguïté d'association faible : l'ensemble des paires d'observations issues du même objet à une révolution d'intervalle.

### Pertinence

L'étude préliminaire d'un ensemble d'observations issues d'une simulation des objets du catalogue Space-Track sur 30 jours nous permet de déduire les valeurs suivantes :

- 11 807 objets passent dans le champ de veille, soit la quasi-totalité des objets en orbite basse contenus dans le catalogue Space-Track,
- 37,36% des observations successives d'un même objet sont espacées d'environ une révolution,
- 99,83% des objets passent dans le champ de veille à une révolution d'intervalle au moins une fois sur 30 jours.

Cela démontre que les observations à une révolution d'intervalle sont relativement fréquentes et devraient permettre une bonne couverture de l'ensemble des objets en orbite basse.

### 6.1.1 Observations issues du capteur supposé

Les objets en orbite basse sont observés par un capteur tel que défini au Chapitre 2. Rappelons que celui-ci fournit trois mesures datées par observation, qui peuvent s'agencer dans le vecteur d'observation suivant :

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} t \\ \rho \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

où  $t$  est l'instant de l'observation  $\mathbf{z}$ ,  $\rho$ ,  $\theta$  et  $\phi$  sont respectivement la mesure de distance capteur-cible, la mesure d'azimut et la mesure d'élévation. Les bruits associées sont  $\sigma_\rho = 30$  m et  $\sigma_\theta = \sigma_\phi = 0,2^\circ$ .

De par leur nature, ces observations peuvent s'exprimer dans des référentiels différents (référentiel capteur, géocentrique fixe ECF, géocentrique inertiel ECI, *etc.*). En revanche, le volume d'erreur d'observation n'est décrit de manière simple que dans le référentiel capteur.

### Choix des descripteurs d'une paire d'observations

Choisir de décrire une paire par la distance cartésienne entre les observations qu'elle comporte est l'option la plus simple. Cependant, la symétrie de la distance cartésienne néglige l'information que comportent  $\Theta$  (caractéristiques du capteur, notamment la forme et l'orientation du champ de veille) et les particularités de la population d'objets en orbite basse. Par conséquent, nous proposons un vecteur de description  $\mathbf{x}(i, j)$  d'une paire d'observations comportant cinq composantes moins conventionnelles, désignées par  $\tau$ ,  $d_r$ ,  $d_{r\lambda}$ ,  $d_\theta$  et  $r$ . Le rayon géocentrique  $r$  (ou l'altitude) étant un paramètre dont dépend en particulier  $\tau$ , nous l'incluons dans le vecteur  $\mathbf{x}(i, j)$ . La fonction  $f^{\text{extr.}}$  qui permet d'extraire  $\mathbf{x}(i, j)$  d'une paire d'observations  $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\}$  se définit telle que :

$$f^{\text{extr.}} : \quad \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \quad \longmapsto \quad \mathbb{R}^5$$

$$\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\} = \left\{ \begin{pmatrix} t_i \\ \rho_i \\ \theta_i \\ \phi_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_j \\ \rho_j \\ \theta_j \\ \phi_j \end{pmatrix} \right\} \quad \longmapsto \quad \mathbf{x}(i, j) = \begin{pmatrix} \tau(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \\ d_r(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \\ d_{r\lambda}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \\ d_\theta(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \\ r(\mathbf{z}_i) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

où nous rappelons que  $t_i$  désigne l'instant de l'observation  $\mathbf{z}_i$ ,  $\rho_i$  la mesure de distance associée,  $\theta_i$  et  $\phi_i$  les mesures d'angles associées.

Le paramètre  $\tau$  est la différence des dates des observations,  $d_r$  est la valeur absolue de la différence de rayon géocentrique,

$d_{r\lambda}$  est la longueur de l'arc de longitude (cf. Figure 6.1),  
 $d_\theta$  est la valeur absolue de la différence d'azimut de détection :

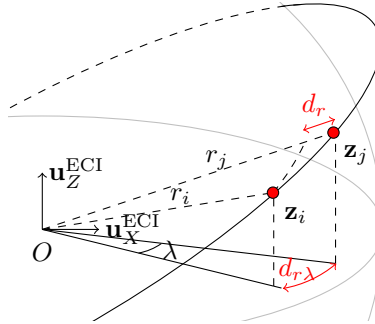
$$\begin{aligned} d_r(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) &= |r_i - r_j| \\ d_{r\lambda}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) &= |\lambda_i r_i - \lambda_j r_j| \\ d_\theta(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) &= |\theta_i - \theta_j| \end{aligned} \quad (6.3)$$

où  $r$  représente un rayon géocentrique lié à une observation et  $\lambda$  représente une longitude dans un référentiel ECI :

$$\begin{aligned} r &= \|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}_{\text{obs.}}^{\text{ECI}} + \mathbf{r}_{\text{capteur}}^{\text{ECI}}\| \\ \lambda &= \arccos\left(\frac{r_X}{r_{XY}}\right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

avec  $\mathbf{r}_{\text{obs.}}^{\text{ECI}}$  le vecteur observé capteur-cible dans un référentiel géocentrique inertiel (ECI),  $\mathbf{r}_{\text{capteur}}^{\text{ECI}}$  le vecteur-position du capteur dans un référentiel ECI,  $r_X$  la composante du vecteur  $\mathbf{r}$  en  $\mathbf{u}_X^{\text{ECI}}$  (vecteur unitaire du plan équatorial) et  $r_{XY}$  la composante du vecteur  $\mathbf{r}$  dans le plan équatorial  $\{\mathbf{u}_X^{\text{ECI}}, \mathbf{u}_Y^{\text{ECI}}\}$  (cf. Chapitre 3).

La Figure 6.1 permet de mieux comprendre la géométrie des paramètres  $d_r$  et  $d_{r\lambda}$ .



**Figure 6.1** – Exemple de  $d_r$  et de  $d_{r\lambda}$  dans un repère ECI.  $\lambda$  est la différence de longitudes des observations dans un repère ECI.

Le choix du paramètre  $d_r$  est motivé par la faible excentricité des orbites des objets (cf. Chapitre 3). En effet, la variation d'altitude est telle que  $r \in [a_o(1 - e_o), a_o(1 + e_o)]$ , ce qui pour une excentricité  $e_o$  faible, entraîne une plage de variation de rayon  $r$  étroite.

Le choix du paramètre  $d_{r\lambda}$  est alors immédiat car il représente une dimension orthogonale et homogène à celle de  $d_r$ .

Le paramètre  $d_\theta$  impacte fortement les valeurs que peuvent prendre  $d_r$  et  $d_{r\lambda}$ , notamment pour les observations à une révolution d'intervalle. Comme l'illustre la Figure 6.2, une plus petite valeur de  $d_\theta$  implique des valeurs de  $d_r$  et de  $d_{r\lambda}$  plus petites en moyenne car les portions d'orbite observées sont plus proches. De même,  $d_\theta$  influence  $\tau$  mais dans de moindres proportions.

Enfin, les paramètres  $r$  et  $\tau$  sont fortement liés par la troisième loi de Kepler.

Nous notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des paires d'observations quelconques (issues du même objet ou non), et  $\mathcal{F}$  l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{x}$  possibles :

$$\mathcal{F} = f^{\text{extr.}}(\mathcal{E}) \quad (6.5)$$

L'ensemble des paires d'observations à une révolution d'intervalle est un sous-ensemble de  $\mathcal{E}$  que nous notons  $\mathcal{E}_{1\text{rév.}}$ .

### Ensemble des paires d'observations à une révolution d'intervalle

Nous justifions dans la section précédente l'intérêt des paires d'observations à une révolution d'intervalle : elles permettent, comme nous le prouvons dans la suite de ce document, d'associer des observations avec une faible ambiguïté.

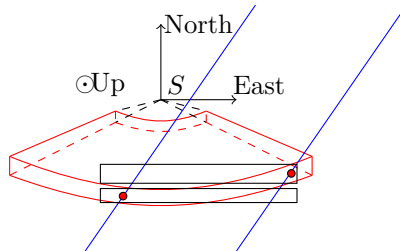
Nécessairement, un élément de  $\mathcal{E}_{1\text{rév.}}$  comporte des observations issues d'un même objet (la notion d'une révolution d'intervalle n'aurait autrement pas de sens). Nous introduisons alors les deux hypothèses  $H_1$  et  $H_0$  portant de manière générale sur des pistes potentielles :

- $H_1$  : “les observations de la piste sont issues du même objet” ou dans le cas d'une piste de deux éléments “les observations  $\mathbf{z}_i$  et  $\mathbf{z}_j$  sont issues du même objet”,
- $H_0$  : “les observations de la piste ne sont pas issues du même objet” ou dans le cas d'une piste de deux éléments “les observations  $\mathbf{z}_i$  et  $\mathbf{z}_j$  ne sont pas issues du même objet”,

Notons que  $H_0 = \overline{H_1}$ .

Dans un référentiel géocentrique inertiel (ECI), un objet en orbite passe par des positions proches d'une révolution à l'autre. C'est de cet aspect de pseudo-périodicité du mouvement que nous tirons avantage pour la corrélation d'observations.

Par ailleurs, la forme et l'orientation du champ de veille du capteur dont nous faisons l'hypothèse (*cf.* Chapitre 2) sont choisies telles que les portions des orbites observées sont variables en fonction de l'azimut de détection (*cf.* Figure 6.2). Cela induit donc un facteur supplémentaire de variation de la position associée à une détection d'une révolution à la suivante.



**Figure 6.2** – La forme et l'orientation du champ de veille (représenté en rouge) impliquent l'observation de portions d'orbites (représentées en bleu) différentes selon l'azimut de détection.

Formellement, on peut expliciter l'ensemble  $\mathcal{E}_{1\text{rév.}}$  des paires d'observations issues du même objet à une révolution d'intervalle de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_{\text{1r v}} = \left\{ \{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\} \mid H_1(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j), \tau_{\min}(\Theta) \leq \tau(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \leq \tau_{\max}(\Theta) \right\} \quad (6.6)$$

    $H_1(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)$  désigne l'assertion "les observations  $\mathbf{z}_i$  et  $\mathbf{z}_j$  sont issues du même objet",  $\tau(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)$  est la différence temporelle en valeur absolue entre  $\mathbf{z}_i$  et  $\mathbf{z}_j$ ,  $\tau_{\min}(\Theta)$  et  $\tau_{\max}(\Theta)$  sont les valeurs qui encadrent le temps d'une révolution. Comme nous l'indiquons dans la notation, ces bornes sont fonction des paramètres de forme et d'orientation du champ de veille du capteur, désignés par  $\Theta$ .

En orbite basse, une révolution dure au moins 88 minutes et au plus 127 minutes. Ces valeurs sont minorées ou majorées de 5% dans notre cas pour prendre en compte l'influence de  $\Theta$  :

$$\begin{aligned} \tau_{\min}(\Theta) &= 88 \times 60 \times 0,95 \simeq 5.10^3 \text{s} \\ \tau_{\max}(\Theta) &= 127 \times 60 \times 1,05 \simeq 8.10^3 \text{s} \end{aligned}$$

## 6.2 Discrimination des paires d'observations

Nous cherchons maintenant à caractériser l'ensemble  $\mathcal{E}_{\text{1r v}}$  des paires d'observations issues d'un même objet à une révolution d'intervalle en estimant la densité de probabilité  $p_{\mathcal{F}_{\text{1r v}}}$  d'une loi sous-jacente dans l'espace image de  $f^{\text{extr.}}$ , noté  $\mathcal{F}$ . Pour cela, nous pouvons disposer, grâce à la simulation, d'un échantillon  $\mathcal{F}_{\text{1r v}}^{\text{sim}} = f^{\text{extr.}}(\mathcal{E}_{\text{1r v}}^{\text{sim}})$  (base d'apprentissage). La disponibilité d'échantillons de test permet d'appliquer d'une part une technique d'apprentissage (en l'occurrence nous utilisons un One-Class SVM) pour estimer le support de  $p_{\mathcal{F}_{\text{1r v}}}$  et d'autre part une technique d'estimation de densité (en l'occurrence les fenêtres de Parzen-Rosenblatt) pour estimer les valeurs que prend  $p_{\mathcal{F}_{\text{1r v}}}$  loin du contour de son support. Cela permet de tester l'appartenance au support de  $p_{\mathcal{F}_{\text{1r v}}}$  d'un vecteur de description  $\mathbf{x}(i, j)$  associé à une paire d'observations  $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\}$  à évaluer ainsi que de comparer sa log-vraisemblance  $L_{i,j}$    un seuil  $s_{\text{SPRT},1}$  défini par le Sequential Probability Ratio Test (SPRT)   la Section 4.3.2.

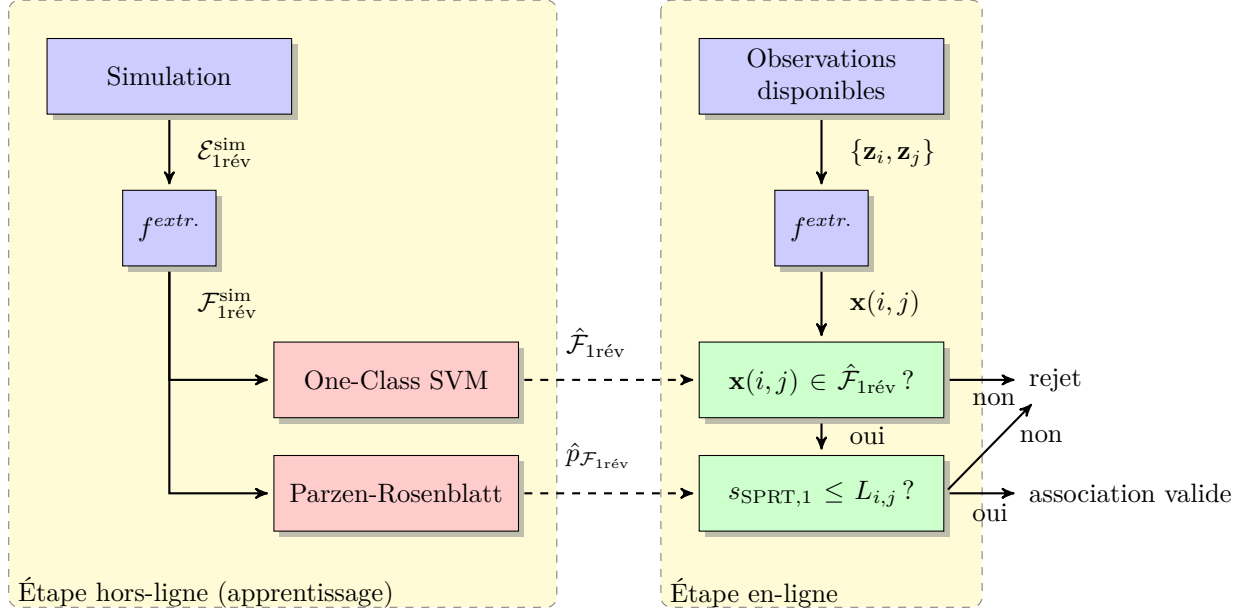
Nous avons défini l'ensemble  $\mathcal{E}$ , l'ensemble  $\mathcal{E}_{\text{1r v}}$  et la fonction  $f^{\text{extr.}}$ . Nous manipulons maintenant les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= f^{\text{extr.}}(\mathcal{E}) \\ \mathcal{F}_{\text{1r v}} &= f^{\text{extr.}}(\mathcal{E}_{\text{1r v}}) \\ \mathcal{F}_{\text{1r v}}^{\text{sim}} &= f^{\text{extr.}}(\mathcal{E}_{\text{1r v}}^{\text{sim}}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

### 6.2.1 Structure de l'algorithme résultant

La méthode proposée se décompose en deux étapes : une étape "hors-ligne",    l'on met en forme une information *a priori* extraite d'une simulation s'appuyant

sur le catalogue existant Space-Track (dont nous rappelons qu'il serait lui-même un échantillon représentatif de la population de débris orbitaux), et une étape "en-ligne", où l'on utilise cette information pour le filtrage de paires d'observations potentiellement issues du même objet, comme l'indique la Figure 6.3.



**Figure 6.3** – Vue d’ensemble de la méthode proposée pour la première association. Le One-Class SVM permet de discriminer les paires d’observations  $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\}$  selon l’appartenance de leurs descripteurs  $\mathbf{x}(i, j)$  à une certaine région. Les fenêtres de Parzen-Rosenblatt permettent de discriminer les paires d’observations selon une mesure de vraisemblance  $L_{i,j}$ .

Sachant que  $\mathcal{F}_{1\text{rév}} \subset \mathcal{F}$  (car  $\mathcal{E}_{1\text{rév}} \subset \mathcal{E}$  et  $f^{\text{extr.}}$  est continue), le support estimé  $\hat{\mathcal{F}}_{1\text{rév}}$  ne pourra être utilisé que dans le sens de la rejection de l’hypothèse  $H_1$  : “les observations  $\mathbf{z}_i$  et  $\mathbf{z}_j$  sont issues du même objet”. En effet :

$$\mathbf{x}(i, j) \in \mathcal{F}_{1\text{rév}} \Rightarrow \{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\} \in \mathcal{E}_{1\text{rév}} \subset \mathcal{E} \Leftrightarrow H_1 \cup \overline{H_1} \quad (6.8)$$

$$\mathbf{x}(i, j) \notin \mathcal{F}_{1\text{rév}} \Rightarrow \{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\} \notin \mathcal{E}_{1\text{rév}} \Rightarrow \overline{H_1} \quad (6.9)$$

Le même raisonnement s’applique également à l’évaluation de la vraisemblance.

Cela permet d’éliminer un très grand nombre de paires d’observations incorrectes, comme nous le voyons en Section 6.3.

## 6.2.2 Base d’apprentissage

Les objets en orbite basse ne sont pas uniformément répartis dans l’espace des orbites. En effet, les excentricités des objets sont en moyenne faibles et les inclinaisons



fortes, en plus d'une concentration inégale selon l'altitude (Figure 3.4). De plus, les paramètres  $\tau_{\min}$  et  $\tau_{\max}$  caractérisant dans une certaine mesure l'ensemble  $\mathcal{E}_{\text{1rév}}$  dépendent de l'ensemble de paramètres intrinsèques au capteur  $\Theta$ . De même, l'ensemble  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}$  dans l'espace des paramètres  $\tau$ ,  $d_r$ ,  $d_{r\lambda}$ ,  $d_\theta$  et  $r$  est fonction de  $\Theta$ . Pour ne pas avoir à chercher une expression analytique de la relation, si tant est qu'elle existe, entre  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}$ , les paramètres  $\Theta$  et la distribution des objets en orbite basse dans l'espace des paramètres orbitaux, nous adoptons une approche numérique. Notre approche consiste alors à générer des éléments de  $\mathcal{E}_{\text{1rév}}$  grâce au catalogue Space-Track.

Pour chaque orbite basse contenue dans le catalogue, nous simulons les observations de l'objet sur une période de 30 jours. Pour cela, la fonction  $f_{\text{SGP}}$  mentionnée lors de la description du modèle SGP à la Section 3.4 est mise en œuvre. À chaque pas de temps, la position de l'objet est simulée et enregistrée si elle est dans le champ de veille du capteur (Field Of Regard, FOR). Parmi les observations disponibles en sortie de ce processus de simulation, nous ne conservons que les paires d'observations séparées d'un temps  $\tau$  tel que  $5.10^3\text{s} \leq \tau \leq 8.10^3\text{s}$ . Les 16 552 paires d'observations extraites de ce processus forment alors un ensemble  $\mathcal{E}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$  d'échantillons simulés de  $\mathcal{E}_{\text{1rév}}$ , dont nous déduisons un ensemble  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$  d'échantillons simulés de  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}$ .

### 6.2.3 Estimation du support par One-Class SVM

Nous cherchons à estimer  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}$ , c'est-à-dire le support de  $p_{\mathcal{F}_{\text{1rév}}}$ , afin de pouvoir déterminer si les observations d'une paire candidate sont potentiellement issues du même objet ou non. Cela revient à un problème de classification semi-supervisé : nous disposons d'un échantillon  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$  à partir duquel il faut inférer une frontière permettant de discriminer des éléments de l'ensemble  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire déterminer si un élément donné de  $\mathcal{F}$  appartient à  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}$ .

L'algorithme One-Class Support Vector Machine (One-Class SVM) [60] est particulièrement adapté à notre problème d'estimation de support. Cet algorithme de classification est une version particulière de l'algorithme SVM bi-classe classique. Son principe consiste à utiliser l'origine comme le "prototype" de la classe  $H_0$  afin de déterminer une frontière autour des échantillons disponibles de la classe  $H_1$  (en l'occurrence les éléments de  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$ ).

Cet algorithme permet d'estimer le  $(1 - \nu)$ -quantile défini comme la région  $C$  de l'espace de volume minimal (au sens classique d'une mesure de Lebesgue  $\mu$ ) qui comprend au moins une proportion  $(1 - \nu)$  de l'échantillon disponible  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$ . Des éléments de  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$  sont alors sélectionnés par l'algorithme afin de résoudre le problème d'optimisation sous contrainte :

$$Q(1 - \nu) = \arg \min_{C \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^q), p(C) > 1 - \nu} \mu(C) \quad (6.10)$$

où la région  $C$  correspond à une estimation de  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}$  :  $C = \hat{\mathcal{F}}_{\text{1rév}}$ .

Une méthode de résolution est fournie dans [60], où il est démontré que la règle de

décision à appliquer à un vecteur candidat  $\mathbf{x}$  peut s'exprimer par :

$$g(\mathbf{x}) = \text{sgn} \left( \sum_n \alpha_i k(\mathbf{x}_{\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}}, \mathbf{x}) + b \right) \in \{-1; 1\} \quad (6.11)$$

où  $k(.,.)$  est une fonction noyau,  $\{\alpha_i\}$  un ensemble de multiplieurs de Lagrange et  $b$  un seuil résultant de l'optimisation effectuée par la One-Class SVM.

Si  $g(\mathbf{x}) = 1$ , alors  $\mathbf{x} \in \hat{\mathcal{F}}_{\text{1rév}}$  ; si  $g(\mathbf{x}) = -1$ , alors  $\mathbf{x} \notin \hat{\mathcal{F}}_{\text{1rév}}$ .

En définitive, le One-Class SVM prend en entrée :

- les éléments de  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$ ,
- le paramètre  $\nu$  définissant la proportion minimale d'éléments de  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$  inclus dans la région  $C$  à définir,
- une fonction noyau  $k(.,.)$  que l'on choisit en général et dans cette étude gaussien :  $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2/\gamma}$  (paramétrée par  $\gamma$  dans ce cas).

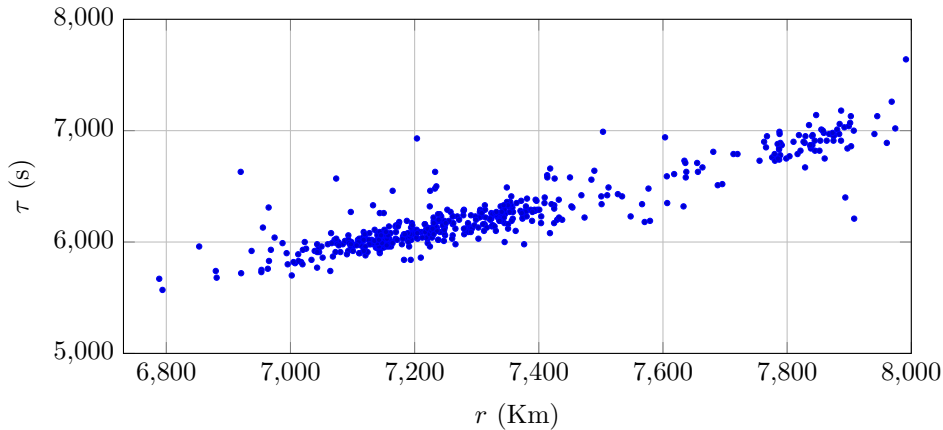
En sortie, cet algorithme fournit une région de l'espace de  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$  définie par :

- un ensemble de “vecteurs de support”  $\{\mathbf{x}_{\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}}^i\}$ ,
- un ensemble de réels  $\{\alpha_i\}$  (définis comme des multiplieurs de Lagrange) associés aux vecteurs de support,
- un seuil  $b$ .

Afin de paramétrer au mieux la One-Class SVM, nous analysons les échantillons disponibles.

### Analyse de l'échantillon $\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$

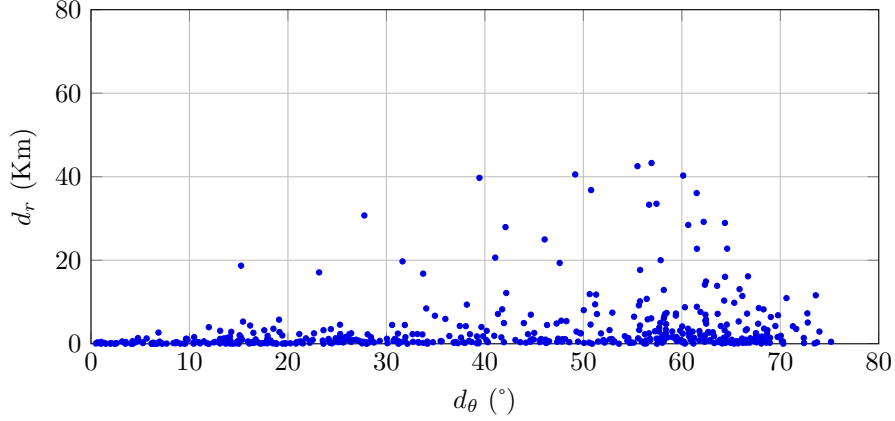
L'observation des échantillons  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$  dans ses sous-espaces nous permet d'observer une très faible corrélation des paramètres  $\tau$ ,  $d_r$  et  $d_{r\lambda}$ . En revanche, il existe une corrélation nette entre  $\tau$  et  $r$ , entre  $d_r$  et  $d_\theta$  et entre  $d_{r\lambda}$  et  $d_\theta$ , comme le montrent les Figures 6.4, 6.5 et 6.6.



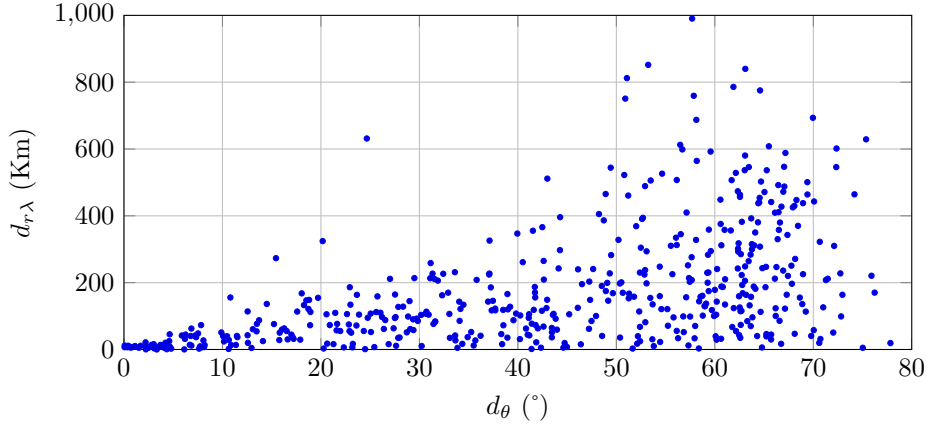
**Figure 6.4** – Exemple de 500 échantillons de  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}$  simulés dans le plan  $(r, \tau)$ .

Nous pouvons observer que  $\tau$  varie en fonction de  $r$  comme le prévoit la troisième loi de Kepler, la dispersion sur l'axe  $\tau$  pour une valeur de  $r$  fixe étant due à l'observation de portions d'orbites en général différentes d'une révolution à l'autre (Figure 6.2).

On observe également un défaut d'échantillons pour les valeurs de  $r$  comprises entre 7 500 Km et 7 700 Km dû à une faible densité de satellites à l'altitude correspondante (cf. Chapitre 1).



**Figure 6.5** – Exemple de 500 échantillons de  $\mathcal{F}_{1\text{rév}}$  simulés dans le plan  $(d_\theta, d_r)$ .



**Figure 6.6** – Exemple de 500 échantillons de  $\mathcal{F}_{1\text{rév}}$  simulés dans le plan  $(d_\theta, d_{r\lambda})$ .

Les échantillons sont nettement plus concentrés sur les faibles valeurs de  $d_r$  du fait des valeurs d'excentricités en général faibles dans le catalogue Space-Track. Nous observons également une moyenne et une dispersion plus importante aux grandes valeurs de  $d_\theta$ , résultant de l'observation de portions d'orbites différentes (Figure 6.2). De même, nous observons une moyenne et une dispersion plus importante des valeurs de  $d_{r\lambda}$  aux grandes valeurs de  $d_\theta$ .

Les trois paramètres  $\tau$ ,  $d_r$  et  $d_{r\lambda}$  étant indépendants, nous choisissons de résoudre indépendamment le problème défini par l'équation (6.10) dans les trois sous-espaces  $(\tau, r)$ ,  $(d_r, d_\theta)$  et  $(d_{r\lambda}, d_\theta)$ . Le support  $\hat{\mathcal{F}}_{1\text{rév}}$  estimé est alors l'union de trois supports déterminés dans chacun de ces plans. Une alternative à cela est de normaliser les vecteurs sur chaque dimension, mais cette option rend le paramétrage plus difficile car il faudrait manipuler un espace à 5 dimensions.

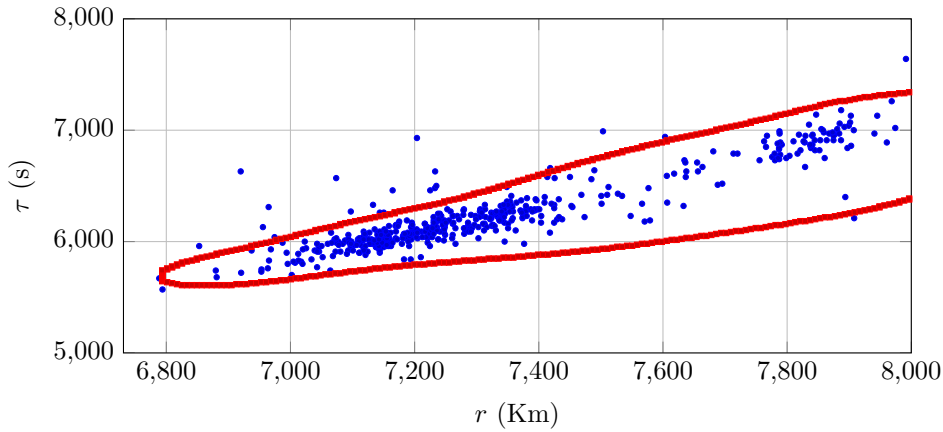
Notons que pour les sous-espaces  $(d_r, d_\theta)$  et  $(d_{r\lambda}, d_\theta)$ , l'origine se situe sur la frontière entre  $H_1$  et  $H_0$ . Ce défaut de la One-Class SVM (qui choisit arbitrairement l'origine

comme prototype de  $H_0$ ) est compensé par la méthode dite de “marge souple” (Soft Margin) qui permet de tolérer un recouvrement des classes  $H_1$  et  $H_0$ .

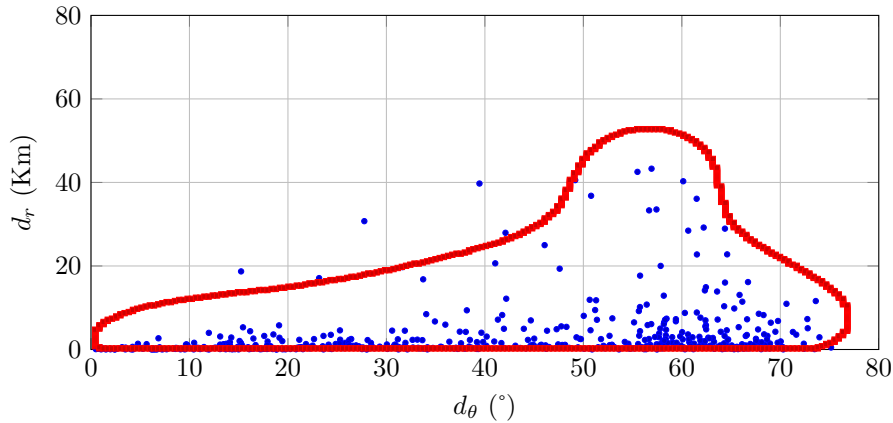
### Paramétrage des One-Class SVM

L’algorithme One-Class SVM tel que nous l’avons présenté prend deux paramètres en entrée : le paramètre  $\nu$ , qui apparaît dans la formulation du problème d’optimisation (équation (6.10)), et le paramètre  $\gamma$  intervenant comme paramètre de dispersion dans un noyaux gaussien. Le paramètre  $\gamma$  est choisi notamment en fonction de la densité d’échantillons. Nous choisissons respectivement  $\gamma = 1,25 \cdot 10^{-3}$ ,  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-6}$  et  $\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$  pour les plans  $(r, \tau)$ ,  $(d_r, d_\theta)$  et  $(d_{r\lambda}, d_\theta)$  pour des données normalisées entre 0 et 1.

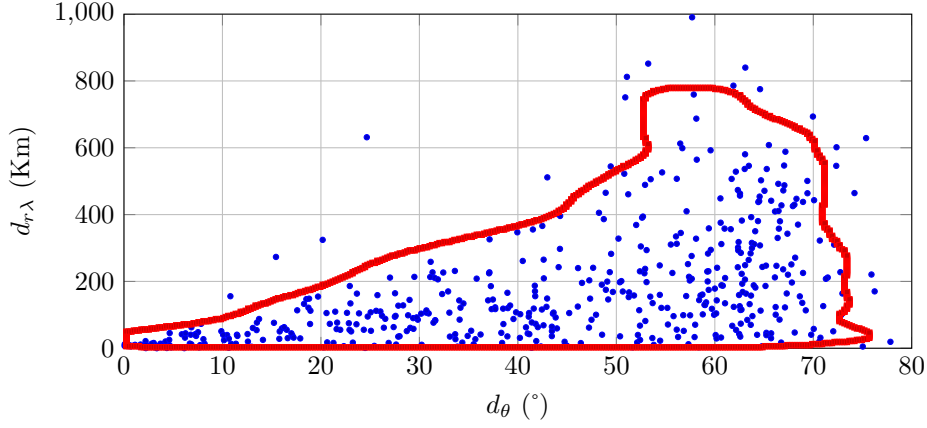
Choisir des valeurs de  $\nu$  proches de 0,05 (c’est-à-dire qu’on estime le support au 95%-quantile) permet d’obtenir des supports “physiquement” valides (c’est-à-dire les frontières obtenues respectent notamment un critère de continuité intuitif).



**Figure 6.7** – Frontière déterminée par l’algorithme One-Class SVM à partir d’échantillons de  $\mathcal{F}_{\text{Irév}}$  simulés dans le plan  $(r, \tau)$ ,  $\nu = 0,05$  et  $\gamma = 1,25 \cdot 10^{-3}$ .



**Figure 6.8** – Frontière déterminée par l’algorithme One-Class SVM à partir d’échantillons de  $\mathcal{F}_{\text{Irév}}$  simulés dans le plan  $(d_\theta, d_r)$ ,  $\nu = 0,05$  et  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-6}$ .



**Figure 6.9** – Frontière déterminée par l’algorithme One-Class SVM à partir d’échantillons de  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}$  simulés dans le plan  $(d_\theta, d_{r\lambda})$ ,  $\nu = 0,05$  et  $\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$ .

Le support estimé  $\hat{\mathcal{F}}_{\text{1rév}}$  est très étroit pour des valeurs faibles de  $d_\theta$ . Il est en effet large de moins de 100 Km sur l’axe  $d_{r\lambda}$  et de moins de 15 Km sur l’axe  $d_r$  pour des valeurs de  $d_\theta$  inférieures à  $10^\circ$ . Pour les valeurs les plus faibles de  $d_\theta$ , ces largeurs sont de l’ordre de, respectivement, 50 Km et 5 Km. Cela confirme la nécessité d’utiliser des particules pour réduire l’impact du bruit d’observation car en effet, l’erreur d’observation aux distances considérées s’élève à environ 11,5 Km à 3-sigma.

Pour pallier cela, nous générons des particules dans les volumes d’erreur des observations et évaluons la proportion de paires de particules  $p$  caractérisées par des vecteurs  $\mathbf{x}_p(i, j)$  appartenant à  $\hat{\mathcal{F}}_{\text{1rév}}$ . Si cette proportion est inférieure à un seuil  $s_{\text{Fp}}$  que nous fixons arbitrairement à 0,01, alors on rejette l’hypothèse  $H_1$  et l’on admet l’hypothèse  $H_0$ .

#### 6.2.4 Calcul d’un rapport de vraisemblance

L’échantillon  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$  contient davantage d’information à exploiter : nous expliquons ici comment la distribution de ces échantillons sur le support estimé  $\hat{\mathcal{F}}_{\text{1rév}}$  peut servir à discriminer les paires d’observations caractérisées par des vecteurs appartenant à  $\hat{\mathcal{F}}_{\text{1rév}}$ .

Il s’agit d’évaluer le rapport de deux probabilités associées à la paire d’observations  $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\}$  à tester : la probabilité  $p(\mathbf{x}(i, j)|H_1)$  que les observations  $\mathbf{z}_i$  et  $\mathbf{z}_j$  soient issues du même objet (hypothèse  $H_1$ ) et la probabilité  $p(\mathbf{x}(i, j)|H_0)$  que les observations  $\mathbf{z}_i$  et  $\mathbf{z}_j$  ne le soient pas (hypothèse  $H_0$ ). Le logarithme de ce rapport de vraisemblance est alors comparé à un seuil  $s_{\text{SPRT},1}$  dont la valeur est définie en équation (4.27) à la Section 4.3.2 selon le Sequential Probability Ratio Test (SPRT) [46].

D’une part, nous estimons la densité de probabilité  $p_{\mathcal{F}_{\text{1rév}}}(\cdot) = p(\cdot|H_1)$  à partir des échantillons simulés  $\mathcal{F}_{\text{1rév}}^{\text{sim}}$  et d’autre part, nous estimons la loi  $p(\cdot|H_0)$  grâce à certaines hypothèses simplificatrices courantes.

Pour estimer  $p_{\mathcal{F}_{\text{1rév}}}(\cdot)$ , nous utilisons dans cette étude la méthode des fenêtres de Parzen-Rosenblatt [61] qui fournissent une estimation  $\hat{p}_{\mathcal{F}_{\text{1rév}}}(\cdot)$  en sommant les lois

résultantes de la convolution d'une loi (en l'occurrence une loi gaussienne) avec chaque échantillon  $\mathbf{x}_{\mathcal{F}_{1\text{rév}}}^n$  :

$$\hat{p}_{\mathcal{F}_{1\text{rév}}}(\mathbf{x}) = \sum_n k\left(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathcal{F}_{1\text{rév}}}^n)\right) = \sum_n K e^{-\|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathcal{F}_{1\text{rév}}}^n)\|^2} \quad (6.12)$$

où  $k(\cdot)$  est la loi choisie gaussienne (et  $K$  un facteur de normalisation) et  $\mathbf{D}$  est la matrice diagonale des écart-types des distances entre les échantillons sur chaque dimension.

Dans [62], la distribution  $p(\cdot|H_0)$  est supposée uniformément égale à la densité de nouvelles observations et de fausses alarmes. Nous devons donc nous ramener à ce résultat en regroupant les paires d'observations dont la première observation est commune. Pour chaque observation  $\mathbf{z}_i$ , nous comptons le nombre  $N(\mathbf{z}_i)$  d'observations  $\mathbf{z}_j$  formant une paire valide avec  $\mathbf{z}_i$ , c'est-à-dire telle que  $\mathbf{x}(i, j) \in \hat{\mathcal{F}}_{1\text{rév}}$ . Il suffit alors de calculer le rapport suivant pour estimer une valeur de  $p(\mathbf{x}(i, j)|H_0)$  en cohérence avec le résultat communément admis exposé dans [62] :

$$\hat{p}(\mathbf{x}(i, j)|H_0) = \frac{N(\mathbf{z}_i)}{\mu(\hat{\mathcal{F}}_{1\text{rév}})} \quad (6.13)$$

où  $\mu$  est la fonction de mesure de volume figurant en équation (6.10).

Finalement, la log-vraisemblance  $L_{i,j}$  associé à une paire d'observations  $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\}$  se calcule par :

$$\begin{aligned} L_{i,j} &= \ln \left( \frac{\hat{p}(\mathbf{x}(i, j)|H_1)}{\hat{p}(\mathbf{x}(i, j)|H_0)} \right) = \ln \left( \frac{\hat{p}_{\mathcal{F}_{1\text{rév}}}(\mathbf{x}(i, j))}{\frac{N(\mathbf{z}_i)}{\mu(\hat{\mathcal{F}}_{1\text{rév}})}} \right) \\ &= \ln \left( \frac{\mu(\hat{\mathcal{F}}_{1\text{rév}})}{N(\mathbf{z}_i)} \times \hat{p}_{\mathcal{F}_{1\text{rév}}}(\mathbf{x}(i, j)) \right) \end{aligned} \quad (6.14)$$

La comparaison de  $L_{i,j}$  au seuil  $s_{\text{SPRT},1}$  permet alors de filtrer les paires d'observations dont la vraisemblance est jugée insuffisante.

### Paramétrage des fenêtres de Parzen-Rosenblatt

Nous appliquons les fenêtres de Parzen-Rosenblatt [61] sur les échantillons contenus dans les supports estimés dans les plans  $(\tau, r)$ ,  $(d_r, d_\theta)$  et  $(d_{r\lambda}, d_\theta)$ . Pour chacun des plans, les deux coefficients de la diagonale de  $\mathbf{D}$  sont choisis à partir des valeurs des écart-types des distances entre les échantillons sur chaque dimension (cela dépend notamment du nombre d'échantillons disponibles). Cela permet d'interpoler de manière efficace les valeurs non-comprises dans l'échantillon disponible.

En revanche, nous ne souhaitons pas inclure l'information que nous considérons "trop spécifique" aux échantillons. Par exemple, la distribution de la densité d'objets en

fonction de l'altitude se retrouve dans le plan  $(\tau, r)$ , ce qui implique à tort une vraisemblance plus élevée pour les paires d'observations sur certaines plages d'altitude. De même, nous considérons qu'une discrimination selon  $d_\theta$  ne serait pas pertinente. Pour pallier cela, nous considérons les lois conditionnelles des variables  $\tau$ ,  $d_r$  et  $d_{r\lambda}$  obtenues par normalisation des lois jointes par les lois marginales de  $r$  et de  $d_\theta$  :

$$p(\tau \mid r = r(\mathbf{z}_i)) = \frac{p(\tau, r)}{p(r = r(\mathbf{z}_i))} \quad (6.15)$$

$$p(d_r \mid d_\theta = d_\theta(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)) = \frac{p(d_r, d_\theta)}{p(d_\theta = d_\theta(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j))} \quad (6.16)$$

$$p(d_{r\lambda} \mid d_\theta = d_\theta(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)) = \frac{p(d_{r\lambda}, d_\theta)}{p(d_\theta = d_\theta(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j))} \quad (6.17)$$

La décorrélation des trois variables  $\tau$ ,  $d_r$  et  $d_{r\lambda}$  nous permet d'exprimer  $p(\cdot \mid H_1) = \hat{p}_{\mathcal{F}_{1\text{rév}}}(\mathbf{x}(i, j))$  sous forme de produit :

$$\begin{aligned} \hat{p}_{\mathcal{F}_{1\text{rév}}}(\mathbf{x}(i, j)) &= p(\tau(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \cap d_r(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \cap d_{r\lambda}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \mid \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \\ &= p(\tau(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \mid r = r(\mathbf{z}_i)) \\ &\quad \times p(d_r(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \mid d_\theta = d_\theta(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)) \\ &\quad \times p(d_{r\lambda}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \mid d_\theta = d_\theta(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Nous disposons maintenant de la distribution  $\hat{p}_{\mathcal{F}_{1\text{rév}}}$  et d'une estimation de son support au 95%-quantile  $\hat{\mathcal{F}}_{1\text{rév}}$ . Ces éléments sont constants et peuvent donc être évalués sur un pavage de  $\hat{\mathcal{F}}_{1\text{rév}}$ . En pratique, l'approximation de  $\hat{\mathcal{F}}_{1\text{rév}}$  obtenue hors-ligne est alors lue pour discriminer les paires d'observations candidates et obtenir une valeur du rapport de vraisemblance associé. Cela permet un filtrage en-ligne très rapide, se limitant à seulement quelques calculs d'indices et quelques tests.

Afin de prendre en compte les erreurs de mesure, le rapport de vraisemblance peut être déduit des vraisemblances associées à chaque particule par moyennage.

Notons  $l_{p,i,j}$  le rapport de vraisemblance associé à la  $p$ -ème paire de particules issues de la paire d'observations  $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\}$  :

$$l_{p,i,j} = \frac{\mu(\hat{\mathcal{F}}_{1\text{rév}})}{N(\mathbf{z}_i)} \times \hat{p}_{\mathcal{F}_{1\text{rév}}}(\mathbf{x}_p(i, j)) \quad (6.19)$$

où  $\mathbf{x}_p(i, j)$  désigne le vecteur de description de la paire de particules issue de  $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\}$ .

Dans ce cas, la log-vraisemblance  $L_{i,j}$  associé à  $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\}$  s'obtient par :

$$\begin{aligned} L_{i,j} &= \ln \left( \frac{1}{P} \sum_p l_{p,i,j} \right) \\ &= \ln \left( \frac{\mu(\hat{\mathcal{F}}_{1\text{rév}})}{N(\mathbf{z}_i) \times P} \cdot \sum_p \hat{p}_{\mathcal{F}_{1\text{rév}}}(\mathbf{x}_p(i, j)) \right) \end{aligned} \quad (6.20)$$

où  $P$  désigne le nombre total de particules générées.

## 6.3 Évaluation préliminaire des performances

Pour évaluer les performances de la méthode de première association proposée, les objets en orbite basse présents dans le catalogue Space-Track sont simulés sur une période de 3 jours et 10 fausses alarmes par scan sont ajoutées. Nous ne bruitons pas les scans ne comprenant pas d’observations issues d’objets réels pour alléger les calculs tout en gardant une densité de détection forte sur les scans “utiles”. Cela fournit 25 917 scans comprenant 491 127 détections regroupées en 416 554 observations (ou arcs courts : regroupe deux détections redondantes, c’est-à-dire très proches spatialement et sur des scans successifs) dans les conditions d’observations définies au Chapitre 2.

La méthode proposée, appliquée sur ce jeu de données, génère 1 160 026 paires d’observations corrélées (les observations n’étant corrélées à aucune autre ne sont pas mémorisées). La vérité terrain nous permet de déduire les chiffres suivants :

Nombre d’objets simulés	11 807
Observations (dont FA)	416 554 (259 170)
Paires d’observations générées	1 160 026
Observations initiales issues d’un objet	93 096
Paires d’observations correctes	64 241
Objets correctement corrélés	11 039

Nous évaluons d’abord l’ambiguïté d’association moyenne obtenue par l’utilisation de la méthode de fenêtrage sur le jeu de 416 554 observations simulées. L’ambiguïté est le nombre d’associations possibles pour chaque observation initiale et permet d’évaluer la complexité combinatoire liée à cette étape, car chaque paire d’observations permet d’initialiser une piste.

Nous étudions ensuite les distributions des scores (log-vraisemblance) obtenus pour les associations correctes et les associations incorrectes afin de vérifier que la valeur de seuil  $s_{\text{SPRT},1}$  permet une discrimination efficace (compromis entre élimination des paires incorrectes et perte de paires correctes). Pour cela, nous utilisons la distance de Mahalanobis [33], qui est un outil permettant de quantifier la “séparabilité” entre deux échantillons sous hypothèse gaussienne. La séparabilité entre l’ensemble des scores associés aux paires correctes et l’ensemble des scores associés aux paires incorrectes est alors évaluée et interprétée.

Enfin, le rappel et l’ambiguïté résultant des deux étapes de filtrage permettent d’évaluer dans une certaine mesure les performances de la méthode proposée, les performances finales étant évaluées dans un contexte multicible au Chapitre 8.

### 6.3.1 Fenêtrage

**Rappel** Nous évaluons le rappel en comptant le nombre d’objets uniques fournissant au moins une paire d’observations correcte détectée grâce à la One-Class SVM.



Le taux de rappel mesuré sur 3 jours est alors de 93,50% :

$$\frac{\text{Nombre d'objets correctement corrélés}}{\text{Nombre total d'objets présents}} = \frac{11\,039}{11\,807} = 93,50\%$$

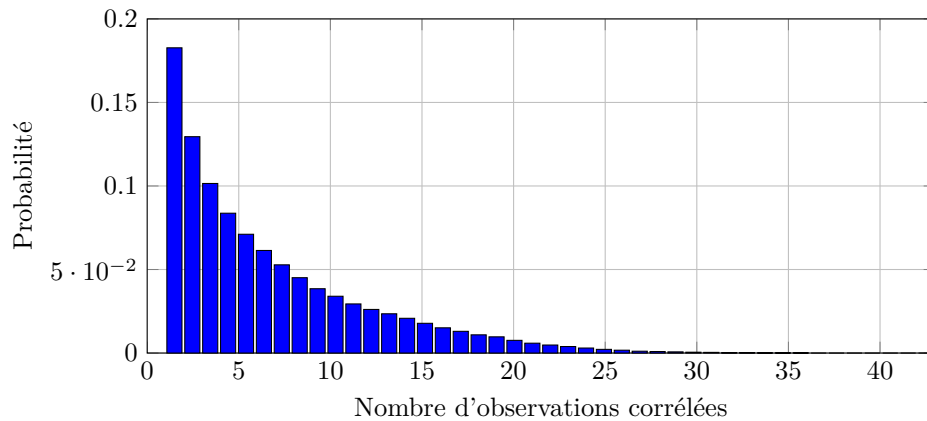
Les 1 160 026 paires d'observations sont constituées de 93 096 observations initiales corrélées à une observation issue du même objet dans 64 241 cas (formant alors une paire d'observations correcte). Nous évaluons alors un rendement de 69,00% :

$$\frac{\text{Nombre de paires d'observations correctes}}{\text{Nombre d'observations initiales corrélées à d'autres observations}} = \frac{64\,241}{93\,096} = 69,00\%$$

Le taux de rappel (93,50%) prend une valeur proche de la valeur de  $\nu$  choisie dans le paramétrage de la One-Class SVM (95%), ce qui tend à démontrer le bon fonctionnement de l'implémentation de la méthode de fenêtrage. Le rendement (69,00%) garantit quant à lui une certaine efficacité du processus.

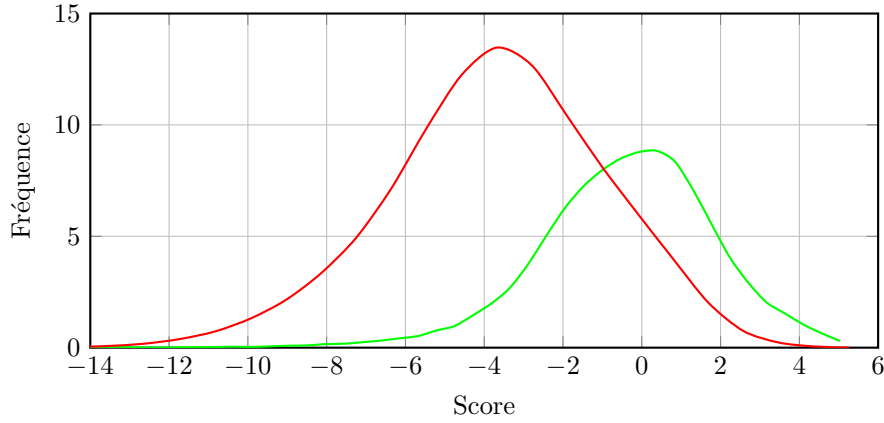
**Ambiguïté** L'objectif de cette méthode étant de réduire au mieux la complexité combinatoire, nous cherchons à évaluer la précision du fenêtrage, c'est-à-dire l'ambiguïté liée à la corrélation de plusieurs observations avec une observation initiale. Pour évaluer la précision du fenêtrage effectué, c'est-à-dire l'ambiguïté d'association moyen, nous comptons pour chaque observation initiale le nombre d'observations corrélées, en excluant les cas où aucune observation n'est corrélée. Nous obtenons ainsi un ensemble de valeurs dont les propriétés statistiques sont les suivantes :

- Moyenne : 6,33 observations associées à une observation initiale,
- Écart-type : 5,55 observations par observation initiale,
- Maximum : 43 observations par observation initiale.



**Figure 6.10** – Distribution du nombre d'observations corrélées par observation initiale.

La répartition du nombre d'observations corrélées par observation initiale est unimodale. La moyenne et l'écart-type permettent de quantifier la précision de la méthode de fenêtrage.



**Figure 6.11** – Distributions des scores associés aux paires d’observations correctes (vert) et aux paires d’observations incorrectes (rouge) issues du fenêtrage.

### 6.3.2 Score

Nous évaluons le score (c’est-à-dire la log-vraisemblance) tel que défini en équation (6.20) pour les paires d’observations corrélées correctes et les paires incorrectes. Nous calculons les moyennes et écart-types suivants pour ces deux ensembles :

- Ensemble  $S_c$  des scores des paires d’observations correctes :
  - Moyenne : -0,42,
  - Écart-type : 2,29,
- Ensemble  $S_{\bar{c}}$  des scores des paires d’observations incorrectes :
  - Moyenne : -3,71,
  - Écart-type : 2,81.

Sous hypothèse gaussienne (*cf.* Figure 6.11), la séparabilité  $d(S_c, S_{\bar{c}})$  des deux ensembles  $S_c$  et  $S_{\bar{c}}$  est de 1,40 :

$$\begin{aligned}
 d(S_c, S_{\bar{c}}) &= (n_c + n_{\bar{c}}) \frac{(m_c - m_{\bar{c}})^2}{n_c \sigma_c^2 + n_{\bar{c}} \sigma_{\bar{c}}^2} \\
 &= (63\,750 + 1\,096\,276) \frac{(-0,42 + 3,71)^2}{63\,750 * 2,29^2 + 1\,096\,276 * 2,81^2} \\
 &= 1,40
 \end{aligned}$$

où  $n_c$  et  $n_{\bar{c}}$  représentent respectivement le nombre de corrélations correctes disponibles et le nombre de corrélations incorrectes disponibles,  $m_c$  et  $m_{\bar{c}}$  les moyennes de ces deux ensembles et  $\sigma_c$  et  $\sigma_{\bar{c}}$  leurs écart-types.

Une séparabilité de 1,40 est équivalente à pouvoir affirmer que les deux échantillons analysés sont issus d’un processus différent avec une “confiance” de 76,33% (l’évaluation en 1,4 de la fonction cumulative de densité du  $\chi^2$  vaut 0,7633).

Grâce à une telle séparabilité, le Sequential Probability Ratio Test (SPRT, *cf.* Section 4.3.2) permet de filtrer davantage d’observations par seuillage. En choisissant un seuil  $s_{SPRT,1} = -5,2983$  (cette valeur est justifiée à la Section 4.3.2), on peut filtrer 26,74% des paires d’observations incorrectes au prix de 2,61% des paires d’observations correctes. Le taux de rappel serait alors de  $93,50 * (1 - 2,61\%) = 91,06\%$  dans le cas le plus pessimiste.

### 6.3.3 Rappel et ambiguïté obtenus par fenêtrage et SPRT

Le rappel obtenu en pratique grâce à la méthode de fenêtrage et au SPRT est de 93,20% :

$$\frac{\text{Nombre d'objets correctement corrélés}}{\text{Nombre total d'objets présents}} = \frac{11\,004}{11\,807} = 93,20\%$$

On obtient une précision finale telle que l'ambiguïté a pour propriétés statistiques :

- Moyenne : 4,87 observations par observation initiale,
- Écart-type : 4,02 observations par observation initiale,
- Maximum : 30 observations par observation initiale.

Le filtrage par SPRT permet donc de réduire de 23,06% le nombre d'observations corrélées à chaque observation initiale en moyenne (4,87 contre 6,33 observations corrélées par observation initiale). Cela est du même ordre que le gain de 26,74% prédit grâce à la Figure 6.11. De même, nous obtenons des gains significatifs sur l'écart-type et le maximum. Le taux de rappel a quant à lui faiblement diminué (de 93,50% à 93,20% au lieu de 91,06%), ce que l'on peut attribuer à une fréquence de passage suffisante et à un rendement relativement élevé (69,00%), c'est-à-dire que plusieurs paires d'observations correctes correspondent à un même objet (sur trois jours : 64 241 paires d'observations correctes pour 11 807 objets présents, c'est-à-dire 5,44 paires d'observations par objet en moyenne).

## 6.4 Conclusion du chapitre

Nous proposons dans ce chapitre une nouvelle méthode permettant une première association d'observations sans calcul d'orbite en nous appuyant sur les observations simulées d'objets réels appartenant au catalogue Space-Track. La complexité combinatoire est gardée sous contrôle grâce à une modélisation des paires d'observations à une révolution d'intervalle qui rend possible une association peu ambiguë. De plus, la méthode proposée s'appuie sur une technique d'apprentissage et a un coût de calcul très faible lors de la mise en correspondance d'observations.

En sortie de cet algorithme, nous obtenons un ensemble de paires d'observations à une révolution d'intervalle. Les paires d'observations correctement associées peuvent être confirmées lors d'une tentative d'initialisation, tandis que les paires fausses peuvent être filtrées. En effet, les prolonger grâce à un modèle dynamique permet d'évaluer leur vraisemblance vis-à-vis d'une trajectoire possible et d'observations supplémentaires, ce qui fait l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 7

## Initialisation du pistage

La Détermination d'Orbite Initiale (IOD) consiste de manière générale à estimer grossièrement une orbite à partir d'un nombre minimal d'observations pour fournir une valeur initiale à un algorithme d'optimisation utilisant la totalité des observations associées. L'IOD peut se faire avec une faible ambiguïté si l'on dispose de deux ou trois observations de position respectant certaines conditions de coplanarité (*cf.* méthodes de type Lambert ou de Herrick-Gibbs au Chapitre 3). Or, nous disposons maintenant de deux observations associées à une révolution d'intervalle. Cela ne suffit pas pour estimer de manière univoque les paramètres orbitaux de l'objet suivi du fait de la proximité des deux observations dans un référentiel inertiel (ECI) vis-à-vis des erreurs de mesure. Il est alors nécessaire d'associer davantage d'observations à une paire initiale pour déterminer ces paramètres orbitaux.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode analytique permettant d'estimer une orbite circulaire (paramètres d'excentricité  $e_o$  et  $\omega_o$  nuls) en tirant avantage des particularités d'une paire d'observations à une révolution d'intervalle. Le faible coût de calcul de cette méthode permet d'appliquer une technique de Monte-Carlo pour prendre en compte le bruit de mesure. L'orbite circulaire obtenue est ensuite utilisée pour associer une troisième observation permettant d'affiner la connaissance sur l'orbite réelle.

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Principe . . . . .</b>	<b>101</b>
<b>7.2</b>	<b>Approximation de l'orbite circulaire <math>X_4</math> . . . . .</b>	<b>102</b>
7.2.1	Nécessité d'un bruit de modèle . . . . .	103
<b>7.3</b>	<b>Association de troisièmes observations par transforma- tion non-parfumée . . . . .</b>	<b>104</b>
7.3.1	Prédiction des observations . . . . .	104
7.3.2	Fenêtrage . . . . .	105
<b>7.4</b>	<b>Estimation d'orbite définitive <math>X_7</math> . . . . .</b>	<b>105</b>
7.4.1	Critère minimisé . . . . .	106
7.4.2	Implémentation de l'algorithme de Gauss-Newton . . . . .	106
7.4.3	Critère de convergence et de validité . . . . .	108
<b>7.5</b>	<b>Évaluation des performances . . . . .</b>	<b>108</b>

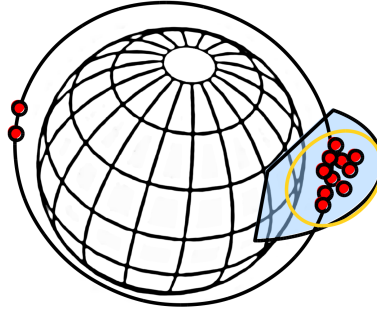
---

7.5.1	Données de test . . . . .	108
7.5.2	Convergence d'un algorithme de Gauss-Newton comme critère de validation . . . . .	109
7.5.3	Fenêtrage . . . . .	110
<b>7.6</b>	<b>Conclusion du chapitre . . . . .</b>	<b>112</b>

---

## 7.1 Principe

Les méthodes de type Lambert (*cf.* Chapitre 5) permettent de calculer des paramètres orbitaux képlériens à partir de deux observations seules. Lorsque l'on dispose de deux observations non-bruitées, ces méthodes fournissent  $2n + 1$  orbites possibles, où  $n$  désigne le nombre de révolutions maximal que l'on autorise. Une paire d'observations permet donc une certaine observabilité des paramètres orbitaux képlériens. Ces méthodes font cependant intervenir des processus itératifs qui ne garantissent ni une convergence systématique, ni un coût de calcul faible ou même constant, et ne prennent pas en compte le bruit d'observation.



**Figure 7.1** – Schéma représentant des observations corrélées avec une paire d'observations initiale à des longitudes opposées.

Une orbite képlérienne comprend au moins 6 paramètres :  $n_o$ ,  $e_o$ ,  $i_o$ ,  $\Omega_o$ ,  $\omega_o$  et  $M_o$  (*cf.* Chapitre 3). Dans le cas d'une orbite circulaire, l'excentricité  $e_o$  est nulle et l'argument du périégée  $\omega_o$  n'a plus de sens. Il reste donc quatre paramètres orbitaux à déterminer ( $n_o$ ,  $i_o$ ,  $\Omega_o$  et  $M_o$ ). Rappelons également que le paramètre de traînée  $B^*$  n'est observable que sur le long terme (plusieurs dizaines d'heures), sa valeur étant approximativement nulle quand les observations disponibles s'étalent sur une période courte.

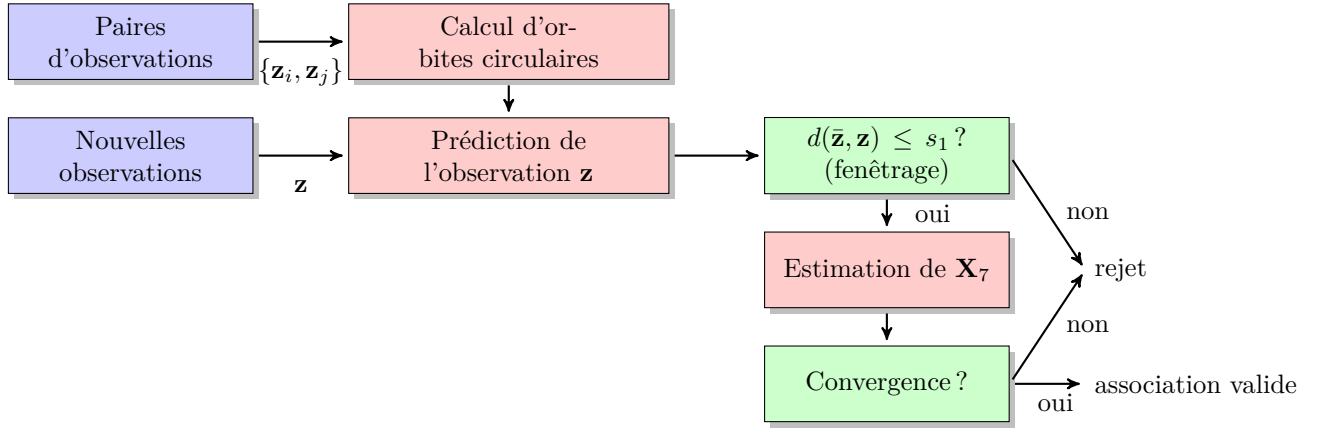
Nous posons  $\mathbf{X}_4 = [n_o, i_o, \Omega_o, M_o]^T$ ,

$\mathbf{X}_7 = [n_o, e_o, i_o, \Omega_o, \omega_o, M_o, B^*]^T$ ,

$\mathbf{X}$  désigne  $\mathbf{X}_4$  ou  $\mathbf{X}_7$ .

Nous proposons une méthode alternative tirant avantage des spécificités du problème : les observations sont espacées d'environ une révolution (le mouvement moyen  $n_o$  est donc presque connu) et les objets sont dans une grande majorité sur des orbites faiblement excentriques.

Cette nouvelle méthode s'appuie alors sur l'estimation d'une orbite initiale circulaire pour chaque paire d'observations. À partir de l'estimation d'une telle orbite (estimée et covariance), des méthodes plus classiques, en l'occurrence la transformation non-parfumée et l'algorithme de Gauss-Newton, permettent d'associer davantage d'observations puis de déterminer une orbite définitive  $\mathbf{X}_7$  (les paramètres orbitaux SGP). Les observations ne permettant pas une convergence de l'algorithme de Gauss-Newton sont rejetées.



**Figure 7.2** – L’algorithme résultant fait intervenir deux tests pour garder la complexité combinatoire sous contrôle : le fenêtrage statistique et un critère de convergence de l’algorithme de Gauss-Newton.

## 7.2 Approximation de l'orbite circulaire $\mathbf{X}_4$

Nous disposons de paires d’observations bruitées et à environ une révolution d’intervalle, c’est-à-dire que les observations d’une paire sont proches spatialement dans un référentiel géocentrique inertiel (ECI). Le bruit est alors fortement défavorable à l’observabilité des paramètres orbitaux associés à chaque paire. En revanche, les observations d’une même paire sont espacées dans le temps (entre 88 et 127 minutes d’intervalle), ce qui a pour effet d’améliorer l’observabilité.

Les paramètres d’une orbite circulaire peuvent se déterminer de manière analytique :

$$n_o \simeq \frac{2\pi + \delta_{\mathbf{p}}}{\tau} \quad (7.1)$$

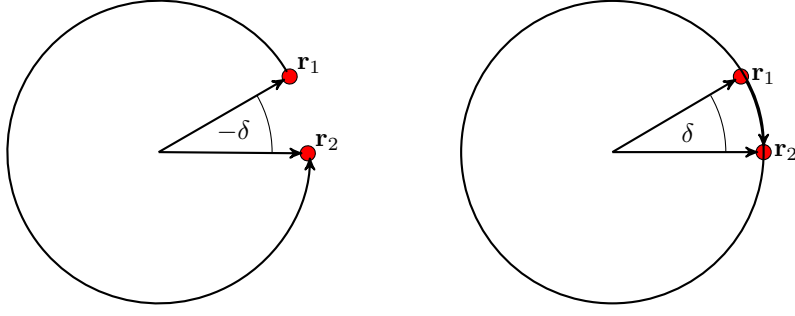
$$i_o \simeq \arccos \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_Z^{\text{ECI}}}{\|\mathbf{p}\|} \quad (7.2)$$

$$\Omega_o \simeq \frac{\pi}{2} \pm \arccos \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_X^{\text{ECI}}}{\|\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_X^{\text{ECI}} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_Y^{\text{ECI}}\|} \quad (7.3)$$

$$M_o \simeq \pm \arccos \frac{\cos \Omega_o \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{u}_X^{\text{ECI}} + \sin \Omega_o \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{u}_Y^{\text{ECI}}}{\|\mathbf{r}_1\|} \quad (7.4)$$

où  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  sont les vecteurs-position associés à la paire d’observations  $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$  dans le référentiel cartésien ECI dont  $\mathbf{u}_X^{\text{ECI}}$ ,  $\mathbf{u}_Y^{\text{ECI}}$  et  $\mathbf{u}_Z^{\text{ECI}}$  sont les vecteurs unitaires,  $\delta_{\mathbf{p}}$  est l’angle signé formé par  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ ,  $\tau$  est la différence temporelle entre  $\mathbf{z}_1$  et  $\mathbf{z}_2$ . Enfin,  $\mathbf{p}$  est le produit vectoriel de  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ . Deux valeurs de  $\mathbf{X}_4$  sont alors possibles, selon que l’objet éventuellement suivi ait fait plus ou moins d’une révolution (signe de  $\delta_{\mathbf{p}}$ , cf. Figure 7.3). Cela conduit alors à envisager deux pistes pour chaque paire d’observations.

Le faible coût de ce calcul permet de prendre en compte le bruit d’observation. Pour cela, nous tirons aléatoirement (selon la même loi de probabilité de l’erreur) des



**Figure 7.3** – Selon le cas, l’angle  $\delta_p$  représente le secteur complémentaire à une révolution (gauche) ou le secteur supplémentaire à une révolution (droite).

vecteurs-position dans le volume d’erreur de chaque observation et calculons des valeurs possibles de  $\mathbf{X}_4$ . La moyenne et la covariance de ces valeurs fournissent une estimée  $\hat{\mathbf{X}}_4$  dotée d’une matrice de covariance  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}},4}$  qui permettent d’appliquer une méthode de fenêtrage pour l’association d’une troisième observation.

### 7.2.1 Nécessité d’un bruit de modèle

L’orbite estimée  $\{\hat{\mathbf{X}}_4, \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}},4}\}$  est biaisée et ne permet pas en général le suivi de l’objet. En effet, l’approximation d’orbite circulaire induit nécessairement un biais dans l’estimation de  $\mathbf{X}_4$  car deux paramètres ( $e_o$  et  $\omega_o$ ) sont négligés. Il est alors nécessaire d’ajouter une matrice diagonale constante, désignée par  $\mathbf{D}_4 = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$ , à la matrice de covariance  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}},4}$  :

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}},4} \leftarrow \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}},4} + \mathbf{D}_4 \quad (7.5)$$

Cela permet de compenser le biais par une dilatation artificielle de la matrice de covariance.

Les coefficients de  $\mathbf{D}_4$  sont déterminés à partir de trajectoires issues du catalogue Space-Track. Leurs valeurs sont ajustées de manière à obtenir les corrélations voulues sur plusieurs cas. En l’occurrence, les valeurs suivantes fournissent le résultat escompté :

$$\begin{aligned} \kappa_1 \quad (\text{associé à } n_o) &= 8.10^{-9} \text{ rad/s} \\ \kappa_2 \quad (\text{associé à } i_o) &= 8.10^{-3} \text{ rad} \\ \kappa_3 \quad (\text{associé à } \Omega_o) &= 8.10^{-3} \text{ rad} \\ \kappa_4 \quad (\text{associé à } M_o) &= 8.10^{-9} \text{ rad} \end{aligned}$$

Ces valeurs se généralisent correctement à l’ensemble des objets simulés dans la suite de cette étude.

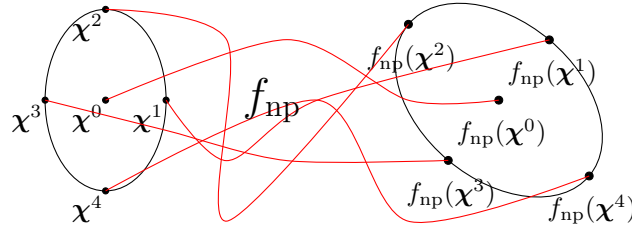


## 7.3 Association de troisièmes observations par transformation non-parfumée

### 7.3.1 Prédiction des observations

Nous disposons maintenant d'une orbite circulaire estimée  $\hat{\mathbf{X}}_4$  et de sa matrice de covariance  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}_4}$ . Il s'agit dans un premier temps de faire un fenêtrage statistique (cf. équation (4.14)) afin de déterminer les observations potentiellement corrélées à  $\hat{\mathbf{X}}_4$ . Pour cela, la transformation non-parfumée [36, 37] semble être un bon compromis entre précision et coût de calcul (cf. Chapitre 4.3), c'est pourquoi nous l'implémentons dans le cadre de cette thèse.

Nous posons  $f_{\text{np}} = h_{\text{capteur}} \circ f_{\text{SGP}}$ , où  $h_{\text{capteur}}$  est la fonction de passage d'un référentiel ECI cartésien au référentiel capteur sphérique, et  $f_{\text{SGP}}$  est la fonction qui calcule une position (la vitesse n'est pas observée par le capteur) dans un référentiel ECI à partir d'une orbite  $\mathbf{X}$ , à la date de l'observation  $\mathbf{z}$  dont nous cherchons à évaluer la corrélation.



**Figure 7.4** – Dans le cas gaussien, les sigma-points définissent les moments statistiques de la densité *a priori* (ici la moyenne et la variance d'une variable à 2 dimensions). Leurs images par la fonction non-linéaire  $f_{\text{np}}$  permet d'estimer ces mêmes moments statistiques concernant la densité *a posteriori*.

Sous une hypothèse gaussienne, on approche la distribution  $\{\hat{\mathbf{X}}_4, \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}_4}\}$  par 9 points ( $2n+1$  points avec  $n=4$  la dimension de l'espace) pondérés par les poids  $\{\varphi^i\}_{i \in \{0,9\}}$ , comme le montre l'équation (7.7), où les  $\chi^i$  sont les "sigma-points". Les sigma-points sont choisis tels que leur moyenne pondérée par les  $\chi^i$  est égale à la moyenne  $\hat{\mathbf{X}}_4$  et que leur covariance pondérée de la même manière soit égale à la covariance  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}_4}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_4 &= \sum_{i=0}^9 \varphi^i \chi^i \\ \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}_4} &= \sum_{i=0}^9 \varphi^i (\chi^i - \hat{\mathbf{X}}_4)(\chi^i - \hat{\mathbf{X}}_4)^T \end{aligned} \tag{7.6}$$

Un jeu de sigma-points peut être obtenu en additionnant et soustrayant à la moyenne  $\hat{\mathbf{X}}_4$  des vecteurs rendant compte de la covariance :

$$\begin{aligned}
 i = 0 & : \chi^0 = \hat{\mathbf{X}}_4, & \varphi^0 &= \frac{1}{5} \\
 1 \leq i \leq 4 & : \chi^i = \hat{\mathbf{X}}_4 + \sqrt{\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}},4}^i}, & \varphi^i &= \frac{1}{10} \\
 5 \leq i \leq 9 & : \chi^i = \hat{\mathbf{X}}_4 - \sqrt{\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}},4}^i}, & \varphi^i &= \frac{1}{10}
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

où  $\sqrt{\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}},4}^i}$  est la  $i$ -ème colonne d'une matrice triangulaire L obtenue par la décomposition de Cholesky de la matrice  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}},4}$ .

La distribution *a posteriori* est déduite des images des sigma-points par la fonction  $f_{\text{SGP}}$ . Cette estimation est non-biaisée et relativement robuste selon certaines études. Dans ce cas, l'observation propagée  $\{\bar{\mathbf{z}}, \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}}\}$  à partir de  $\{\hat{\mathbf{X}}_4, \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}},4}\}$  s'obtient par :

$$\bar{\mathbf{z}} = \sum_{i=0}^9 \varphi^i f_{\text{np}}(\chi^i) \tag{7.8}$$

$$\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}} = \sum_{i=0}^9 \varphi^i (f_{\text{np}}(\chi^i) - \bar{\mathbf{z}})(f_{\text{np}}(\chi^i) - \bar{\mathbf{z}})^T$$

### 7.3.2 Fenêtrage

Cette distribution permet de définir une fonction de fenêtrage permettant l'association de nouvelles observations  $\{\mathbf{z}_i\}$ , en utilisant la distance statistique (Mahalanobis, cf. équation (4.14)) entre la distribution  $\{\bar{\mathbf{z}}, \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}}\}$  ainsi estimée et la distribution de l'observation  $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{P}_{\mathbf{z}\mathbf{z},j}\}$  (volume d'erreur centré sur l'observation). Le test suivant permet de corrélérer une observation  $\mathbf{z}_i$  à l'orbite  $\{\hat{\mathbf{X}}_4, \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}},4}\}$  :

$$d(\bar{\mathbf{z}}, \mathbf{z}_i) = \sqrt{(\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_i)^T (\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}} + \mathbf{P}_{\mathbf{z}\mathbf{z},j})^{-1} (\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_i)} \leq s_F \tag{7.9}$$

Les observations valides permettent de prolonger la paire d'observation en triplet d'observations, chaque triplet permettant une tentative d'estimation d'orbite définitive grâce à un algorithme de Gauss-Newton en prenant pour valeur initiale  $\hat{\mathbf{X}}_4$ .

Nous appliquons également cette technique pour associer de nouvelles observations quand un état  $\mathbf{X}_7$  est disponible.

## 7.4 Estimation d'orbite définitive $\mathbf{X}_7$

En théorie, un jeu de trois observations de position suffisamment espacées dans le temps et/ou dans l'espace (vis-à-vis du bruit d'observation) permettent le calcul de paramètres orbitaux sans ambiguïté (c'est-à-dire une solution unique). Dans la pratique, nous pouvons utiliser la paire d'observations à une révolution d'intervalle associée à une troisième observation pour estimer les paramètres orbitaux  $\mathbf{X}_7 = [n_o, e_o, i_o, \Omega_o, \omega_o, M_o, B^*]^T$  grâce à un algorithme de Gauss-Newton.

### 7.4.1 Critère minimisé

Le capteur fournit des mesures en angle  $(\theta_i, \phi_i)$  et en distance  $(\rho_i)$  associées à une observation  $\mathbf{z}_i$  à la date  $t_i$  et la fonction  $f_{\text{SGP}}$  permet de prédire ces mesures à un instant  $t_i$  à partir de paramètres orbitaux  $\mathbf{X}$  :

$$(h_{\text{capteur}} \circ f_{\text{SGP}})(\mathbf{X}, t_i) = \bar{\mathbf{z}}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{\phi}_i \end{pmatrix}_{\mathbf{X}, t_i} \quad (7.10)$$

où  $h_{\text{capteur}}$  est la fonction de passage du référentiel ECI au référentiel capteur.

Nous rapportons les observations prédites dans le référentiel capteur car cela permettant d'avoir une matrice de covariance de l'erreur  $\mathbf{P}_{\mathbf{zz}} = \text{diag}(\sigma_\rho^2, \sigma_\theta^2, \sigma_\phi^2)$  de mesure constante. Nous minimisons alors l'erreur quadratique suivante :

$$\varepsilon_Q(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{(\bar{\rho}_i - \rho_i)^2}{\sigma_\rho^2} + \frac{(\bar{\theta}_i - \theta_i)^2}{\sigma_\theta^2} + \frac{(\bar{\phi}_i - \phi_i)^2}{\sigma_\phi^2} \right) \quad (7.11)$$

où  $\bar{\rho}_i$ ,  $\bar{\theta}_i$  et  $\bar{\phi}_i$  sont les mesures prédites à l'instant  $t_i$  de l'observation  $\mathbf{z}_i$  contenant les mesures  $\rho_i$ ,  $\theta_i$  et  $\phi_i$ , et  $n$  est le nombre d'observations disponibles.

L'algorithme de Gauss-Newton permet de minimiser  $\varepsilon_Q$  en fonction de  $\mathbf{X}$  par un processus itératif.

### 7.4.2 Implémentation de l'algorithme de Gauss-Newton

L'algorithme de Gauss-Newton permet d'estimer  $\mathbf{X}$  de manière itérative. À chaque itération,  $\mathbf{X}$  est incrémenté d'une valeur  $\Delta\mathbf{X}$  déterminée grâce à la jacobienne de la fonction  $f_{\text{SGP}}$  évaluée en chaque observation disponible  $\mathbf{z}_i$ . La valeur initiale  $\mathbf{X}_0$  de  $\mathbf{X}$  prend les valeurs de  $\mathbf{X}_4$  en  $n_o$ ,  $i_o$ ,  $\Omega_o$  et  $M_o$  et prend des valeurs nulles pour les paramètres  $e_o$ ,  $\omega_o$  et  $B^*$ .

---

**Algorithme 1** : Algorithme de Gauss-Newton itératif pour la détermination d'une orbite définitive.

---

**Données** : Observations  $\mathbf{z}_i$  associées et leurs matrices de covariance  $\mathbf{P}_{\mathbf{z}\mathbf{z},i}$ .

**Entrées** : Vecteur initial  $\mathbf{X}_0$ , seuil de convergence  $s_C$ .

**Sorties** : Estimation  $\hat{\mathbf{X}}$  minimisant l'erreur quadratique  $\varepsilon_Q$  et matrice de covariance  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}}$  associée.

```

1 Initialiser  $\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}_0$ 
2 tant que  $\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \geq s_C$  ou  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$  faire
3   pour chaque  $\mathbf{z}_i$  faire
4     Prédire l'observation  $\bar{\mathbf{z}}_i$  à l'instant de  $\mathbf{z}_i$ 
5     Former le vecteur de résidus  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  tel que  $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \bar{\mathbf{z}}_i - \mathbf{z}_i$ 
6     Calculer la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\varepsilon},i}$  à l'instant de  $\mathbf{z}_i$  (différences finies)
7     Accumuler les matrices de covariance normalisées  $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\varepsilon},i}^T \mathbf{P}_{\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i}^{-1} \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varepsilon},i}$  et
         $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\varepsilon},i}^T \mathbf{P}_{\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i$ 
8   fin
9   Calculer la matrice de covariance  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} = (\mathbf{J}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{P}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}^{-1} \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varepsilon}})^{-1}$  et l'élémentaire
         $\Delta\mathbf{X} = -\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{P}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}$ 
10  Actualiser le vecteur  $\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}$ 
11 fin

```

---

## Calcul de la matrice jacobienne

La matrice jacobienne  $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$  caractérise localement la variation d'une fonction multidimensionnelle, en l'occurrence le vecteur des résidus  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Elle est définie formellement par l'équation (7.12), où  $i$  et  $j$  sont les indices des lignes et des colonnes de la matrice,  $\mathbf{X}$  est le point auquel est évaluée la matrice jacobienne et les  $\{x_j\}$  sont ses composantes.

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{X}) = \left[ \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right]_{i,j} \quad (7.12)$$

La fonction  $\boldsymbol{\varepsilon}$  n'est pas analytique (car  $f_{\text{SGP}}$  ne l'est pas). Une approximation des valeurs de la matrice jacobienne est alors calculée par méthode des éléments finis dont le principe repose sur la définition de la matrice jacobienne en tant que limite de la fonction matricielle définie en équation (7.13), où  $\boldsymbol{\delta x}$  est un incrément,  $\{\delta x_j\}$  ses composantes et  $\alpha$  un réel.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[ \frac{\varepsilon_i(\mathbf{X} + \alpha \boldsymbol{\delta x}) - \varepsilon_i(\mathbf{X})}{\alpha \delta x_j} \right]_{i,j} = \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{X}) \quad (7.13)$$

Pour approcher une valeur de la matrice jacobienne en  $\mathbf{X}$ , on définit un vecteur  $\boldsymbol{\delta x}$  pour tenir compte des sensibilité relatives des paramètres et on fixe une valeur de  $\alpha$  suffisamment petite de manière à approcher le mieux possible la matrice jacobienne sans impliquer de trop grandes erreurs numériques.

### 7.4.3 Critère de convergence et de validité

Plusieurs critères de convergence sont possibles. Pour cette étude, le critère de sortie suivant permet de vérifier que l'incrément est petit par rapport au vecteur d'état afin de détecter la convergence :

$$\frac{\|\Delta \mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} < s_C \quad (7.14)$$

où  $\mathbf{X}$  est l'état estimé,  $\Delta \mathbf{X}$  est l'incrément associé à la dernière itération et  $s_C$  est un seuil de convergence dont la valeur est fixée empiriquement à  $1.10^{-5}$ .

Dans le cas convergeant, nous vérifions que les mesures prédites appartiennent aux volumes d'erreurs des mesures observées :

$$\varepsilon_Q(\hat{\mathbf{X}}) < s_\varepsilon \quad (7.15)$$

En effet, si les trois observations ne sont pas issues du même objet, alors l'algorithme de Gauss-Newton peut converger vers une valeur associée à une erreur quadratique  $\varepsilon_Q$ , mais celle-ci dépasse en général un certain seuil  $s_\varepsilon$ .

En l'occurrence, l'erreur quadratique  $\varepsilon_Q$  est la somme de  $3n$  lois gaussiennes centrées et réduites. Le seuil  $s_\varepsilon$  peut alors être choisi en fonction d'une loi du Khi-2 à  $3n$  degrés de libertés, mais pour des raisons pratiques, nous choisissons de fixer  $s_\varepsilon = 27n$  en considérant que  $\frac{\bar{\rho}_i - \rho_i}{\sigma_\rho} \leq 3$ ,  $\frac{\bar{\theta}_i - \theta_i}{\sigma_\theta} \leq 3$  et  $\frac{\bar{\phi}_i - \phi_i}{\sigma_\phi} \leq 3$  sont des conditions nécessaires à l'hypothèse  $H_1$  selon laquelle "les observations sont issues d'un même objet".

Sachant  $H_1$  :

$$\frac{\bar{\rho}_i - \rho_i}{\sigma_\rho} \leq 3 \text{ et } \frac{\bar{\theta}_i - \theta_i}{\sigma_\theta} \leq 3 \text{ et } \frac{\bar{\phi}_i - \phi_i}{\sigma_\phi} \leq 3 \quad (7.16)$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{\rho}_i - \rho_i)^2}{\sigma_\rho^2} + \frac{(\bar{\theta}_i - \theta_i)^2}{\sigma_\theta^2} + \frac{(\bar{\phi}_i - \phi_i)^2}{\sigma_\phi^2} \leq 27 \quad (7.17)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_Q(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{(\bar{\rho}_i - \rho_i)^2}{\sigma_\rho^2} + \frac{(\bar{\theta}_i - \theta_i)^2}{\sigma_\theta^2} + \frac{(\bar{\phi}_i - \phi_i)^2}{\sigma_\phi^2} \right) \leq 27n = s_\varepsilon \quad (7.18)$$

Ce critère de validité joue un rôle très important pour la discrimination des pistes (séquences d'observations) car il permet de filtrer un grand nombre des fausses pistes.

## 7.5 Évaluation des performances

### 7.5.1 Données de test

Pour évaluer les performances de la méthode de première association proposée, les objets en orbite basse présents dans le catalogue Space-Track sont simulés sur une

période de 3 jours et 10 fausses alarmes par scan sont ajoutées. Cela fournit 25 917 scans comprenant 416 554 observations dans les conditions d’observations définies au Chapitre 2 (ces conditions sont identiques à celles du Section 6.3).

Nous appliquons ensuite la méthode de première association proposée au Chapitre 6. Nous calculons deux orbites circulaires (cas  $\delta_{\mathbf{p}} \geq 0$  et cas  $\delta_{\mathbf{p}} \leq 0$ ) à partir de 5 000 paires d’observations obtenues. Il en résulte 10 000 orbites circulaires que nous propageons dans le temps pour corrélérer davantage d’observations sur une fenêtre de 36 heures.

Les pistes obtenues permettent alors d’étudier l’ambiguïté moyenne (nombre d’observations corrélées par paire) de la méthode de seconde association ainsi que la pertinence des critères utilisés pour discriminer les pistes correctes des pistes incorrectes.

### 7.5.2 Convergence d’un algorithme de Gauss-Newton comme critère de validation

Les tests effectués permettent de déduire le Tableau 7.1 qui indique la proportion de triplets corrects entraînant une convergence de l’algorithme de Gauss-Newton et la proportion de triplets incorrects entraînant une divergence.

% (#)	Triplets corrects	Triplets incorrects
Convergence	67,20 (678)	1,36 (201 715)
Divergence	32,80 (331)	98,64 (14 631 621)
Total	100,00 (1009)	100,00 (14 833 336)

**Tableau 7.1** – Taux de convergence et le taux de divergence pour les triplets d’observations corrects et les triplets d’observation incorrects sur un échantillon de test.

La convergence de l’algorithme de Gauss-Newton est une condition nécessaire à la conformité d’une piste (comme nous le mentionnons en Section 7.4), mais ce n’est pas une condition suffisante. En effet, le Tableau 7.1 indique d’une part que plus de 67% des triplets corrects permettent une convergence, les autres triplets entraînant une divergence. Quant aux triplets incorrects, ils entraînent une divergence dans plus de 98% des cas.

Nous déduisons du Tableau 7.1 que la convergence n’est pas un bon critère de validation des triplets d’observations corrects. Cependant, le nombre de triplets incorrects étant très grand devant le nombre de triplets corrects, nous faisons le choix d’invalider un triplet entraînant une divergence. Bien que nous perdons 32,80% des triplets corrects, nous éliminons un très grand nombre de triplets incorrects et gardons ainsi la complexité combinatoire sous contrôle.

### 7.5.3 Fenêtrage

**Rappel** Sur les 3 jours simulés, la méthode d’association de troisièmes observations appliquée aux paires d’observations disponibles fournit des triplets d’observations corrects correspondant à 10 188 objets différents. Le rappel total est donc de 86,29% :

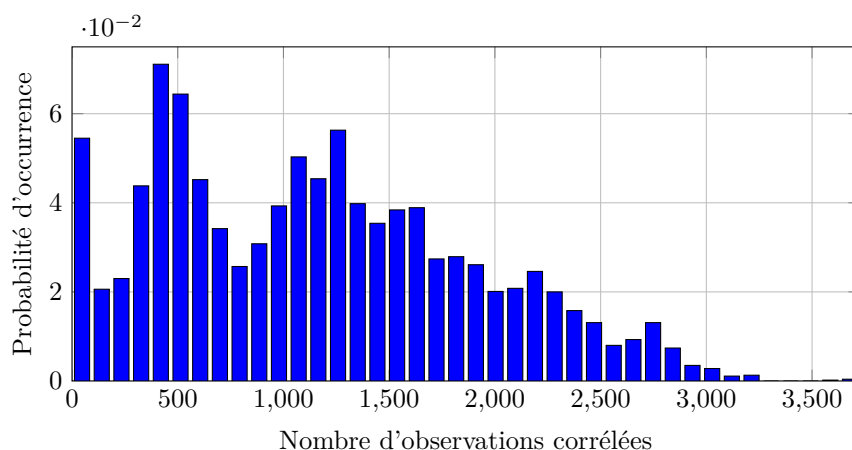
$$\frac{\text{Nombre d'objets correctement corrélés}}{\text{Nombre total d'objets présents}} = \frac{10\,188}{11\,807} = 86,29\%$$

Le rappel propre de la méthode de première association était de 93,20%. Nous en déduisons que le rappel propre de la méthode de deuxième association est de 92,59%.

Notons que ces valeurs de rappel sont des bornes inférieures des rappels réels. En effet, sur une durée de simulation plus longue, les objets non-suivis ont plus d’occasions d’être observés dans des conditions plus favorables à l’initialisation de piste.

**Ambiguïté** Compter le nombre moyen de troisièmes observations corrélées à partir d’une paire d’observations et d’un état estimé  $\mathbf{X}_4$  permet d’évaluer l’ambiguïté de la méthode d’association proposée. Ce nombre peut prendre des valeurs très disparates, comme l’indique la Figure 7.5 :

- Moyenne : 1 161 observations par paire d’observations initiale,
- Écart-type : 737 observations par paire d’observations initiale,
- Maximum : 3 726 observations par paire d’observations initiale.

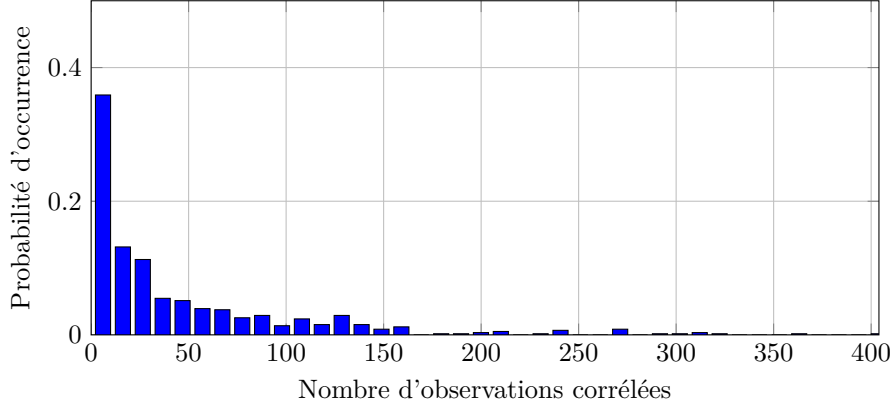


**Figure 7.5** – Distribution du nombre d’observations corrélées par paire d’observations pour des pistes quelconques.

Le nombre d’hypothèses d’association de troisième observation testées est bien plus faible pour les pistes correctes : nous obtenons l’histogramme de la Figure 7.6 en comptant le nombre de troisièmes observations corrélées jusqu’à ce que l’on dispose d’une observation permettant la convergence d’un algorithme de Gauss-Newton et d’une quatrième observation issue du même objet corrélée grâce à l’état  $\mathbf{X}_7$  estimé à partir du triplet d’observations correctes.

Les propriétés statistiques de ce paramètre sont les suivantes :

- Moyenne : 45,86 observations par paire d'observations initiale,
- Écart-type : 61,10 observations par paire d'observations initiale,
- Maximum : 409 observations par paire d'observations initiale.



**Figure 7.6** – Distribution du nombre d'observations corrélées par paire d'observations pour les pistes correctes.

La grande ambiguïté est alors due aux pistes composées entre autres de fausses alarmes. Nous pouvons déduire des Figure 7.5 et Figure 7.6 que limiter à 200 le nombre de troisièmes observations à tester pour chaque paire d'observations initiale permettrait de limiter le nombre de pistes à tester en ne perdant que très peu de pistes initialisables. Le nombre de troisièmes observations candidates par paire d'observations initiale chute alors en moyenne à une valeur de 189,90 observations par paire.

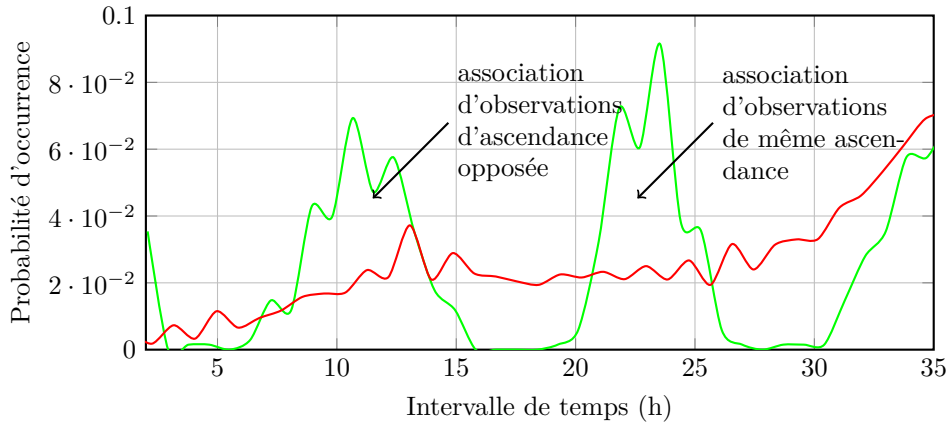
**Intervalles de temps** Il est intéressant d'évaluer les intervalles de temps entre les observations corrélées afin d'estimer la durée de vie d'une piste à initialiser. En effet, nous ne disposons pas d'une mesure de qualité de piste suffisante pour décider de la suppression de pistes en cours d'initialisation. Nous permettons alors aux pistes en cours d'initialisation d'expirer au-delà d'un certain temps, si aucune observation corrélée ne permet la convergence d'un algorithme de Gauss-Newton et l'association d'une quatrième observation.

Nous avons représenté en Figure 7.7 les distributions des intervalles de temps entre une paire d'observations initiale (nous considérons la date de la seconde observation) et les troisièmes observations candidates dans le cas de convergences de l'algorithme de Gauss-Newton et dans le cas de divergences.

Nous observons sur la courbe verte de la Figure 7.7 des pics correspondant aux demi-révolutions de la Terre. Cela s'explique par les inclinaisons relativement élevées des objets en orbite basse : ils ne passent dans le champ de vue qu'à des longitudes quasiment opposées (longitudes proches des longitudes des nœuds ascendants et descendants). Nous pouvons supposer à ce stade que l'expiration d'une piste serait raisonnable après un temps  $t_{\text{exp}}$  d'environ un jour.

Quant à la courbe rouge, elle prend des valeurs plus élevées pour les grandes valeurs d'intervalle de temps, ce qui peut s'expliquer par la dégradation au cours du temps de la précision de l'orbite circulaire propagée.





**Figure 7.7** – Distributions des intervalles de temps entre une paire d’observations initiale et les troisièmes observations candidates permettant la convergence d’un algorithme de Gauss-Newton. La courbe verte représente les pistes correctes et la courbe rouge représente les pistes incorrectes. Les observations associées après un nombre entier (même ascendance) ou demi-entier (ascendance opposée) correspondent aux pics de la courbe verte. Rappelons que l’ascendance est le fait d’aller du Sud au Nord ou du Nord au Sud.

## 7.6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre et au Chapitre 6, nous proposons une nouvelle méthode permettant de définir des orbites associées aux objets détectés par le capteur en gardant la complexité combinatoire sous contrôle. Avec un taux de rappel d’au moins 86% et une complexité combinatoire raisonnable de l’ordre de  $4,87 \times 189,90$  soit 924,81 tripets d’observations par observation initiale, nous avons trouvé un compromis raisonnable en comparaison d’une approche par le test exhaustif des combinaisons d’observations possibles.

Chacune des orbites est déterminée indépendamment des autres. L’initialisation de plusieurs pistes par objet est alors possible et il est nécessaire de mettre en œuvre une technique de pistage multicible pour ne retenir qu’une piste d’observation et une orbite par objet. De plus, les interférences possibles entre les pistes formées grâce à la méthode proposée peuvent jouer un rôle de discrimination supplémentaire pour filtrer ces pistes. Cette chaîne d’initialisation des pistes est alors mise en œuvre dans un algorithme de pistage multicible (en l’occurrence un TO-MHT) au chapitre suivant, afin d’évaluer les performances des méthodes proposées dans un cadre plus proche de conditions d’utilisation réelles.

# Chapitre 8

## Intégration du traitement multicible

Ce chapitre présente la mise en œuvre de la méthode d’initialisation de pistes à partir d’observations isolées dans un contexte multicible.

Nous avons fait le choix d’un Track-Oriented Multiple Hypothesis Tracker (TO-MHT) à partir d’une synthèse des algorithmes de pistage multicible existants au Chapitre 4. Les blocs fonctionnels, dépendant fortement du problème traité ainsi que de la dynamique associée aux cibles, sont identifiés et adaptés selon les particularités de la méthode d’initialisation proposée. Les performances de l’algorithme obtenu sont évaluées sur des scénarios de plusieurs centaines d’objets en orbite basse pour prouver l’efficacité de l’algorithme proposé.

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Principe du Track-Oriented Multiple Hypothesis Tracker (TO-MHT)</b>	<b>114</b>
8.1.1	Hypothèse fondamentale	114
8.1.2	Principe	114
8.1.3	Formation des pistes	115
8.1.4	Évaluation de la qualité individuelle des pistes	116
8.1.5	Construction de solutions globales	120
8.1.6	Suppression de pistes au niveau global	121
8.1.7	Mise-à-jour des états	124
8.1.8	Fusion de pistes	124
<b>8.2</b>	<b>Évaluation des performances</b>	<b>125</b>
8.2.1	Choix des critères d’évaluation	125
8.2.2	Choix des scénarios de test	126
8.2.3	Dégradation des observations	126
8.2.4	Évolution temporelle des critères de performance principaux	127
8.2.5	Évolution temporelle des critères de performance annexes	128
8.2.6	Sensibilité des paramètres de dimensionnement du radar	129
8.2.7	Conclusion des tests de performance	132
<b>8.3</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>132</b>

---

## 8.1 Principe du Track-Oriented Multiple Hypothesis Tracker (TO-MHT)

Un algorithme de pistage multicible, comme le TO-MHT, permet essentiellement de trier (confirmer ou supprimer) un ensemble de pistes issues d'un algorithme de pistage monocible tirant lui-même avantage d'un modèle dynamique. La fréquence des observations issues d'un même objet et la densité de détection vis-à-vis de la dynamique des objets nous ont amené à développer un traitement particulier pour l'initialisation de pistes. Les pistes résultantes sont en effet particulières : elles sont composées d'observations issues de scans non-contigus et le score évaluant la qualité d'une piste n'est pas disponible pour les pistes courtes (moins de quatre observations), ce qui nécessite une certaine adaptation du TO-MHT classique.

### 8.1.1 Hypothèse fondamentale

Le TO-MHT adopte l'hypothèse selon laquelle une même observation ne peut pas être issue de deux cibles distinctes et une même cible ne peut générer deux observations distinctes sur un même scan.

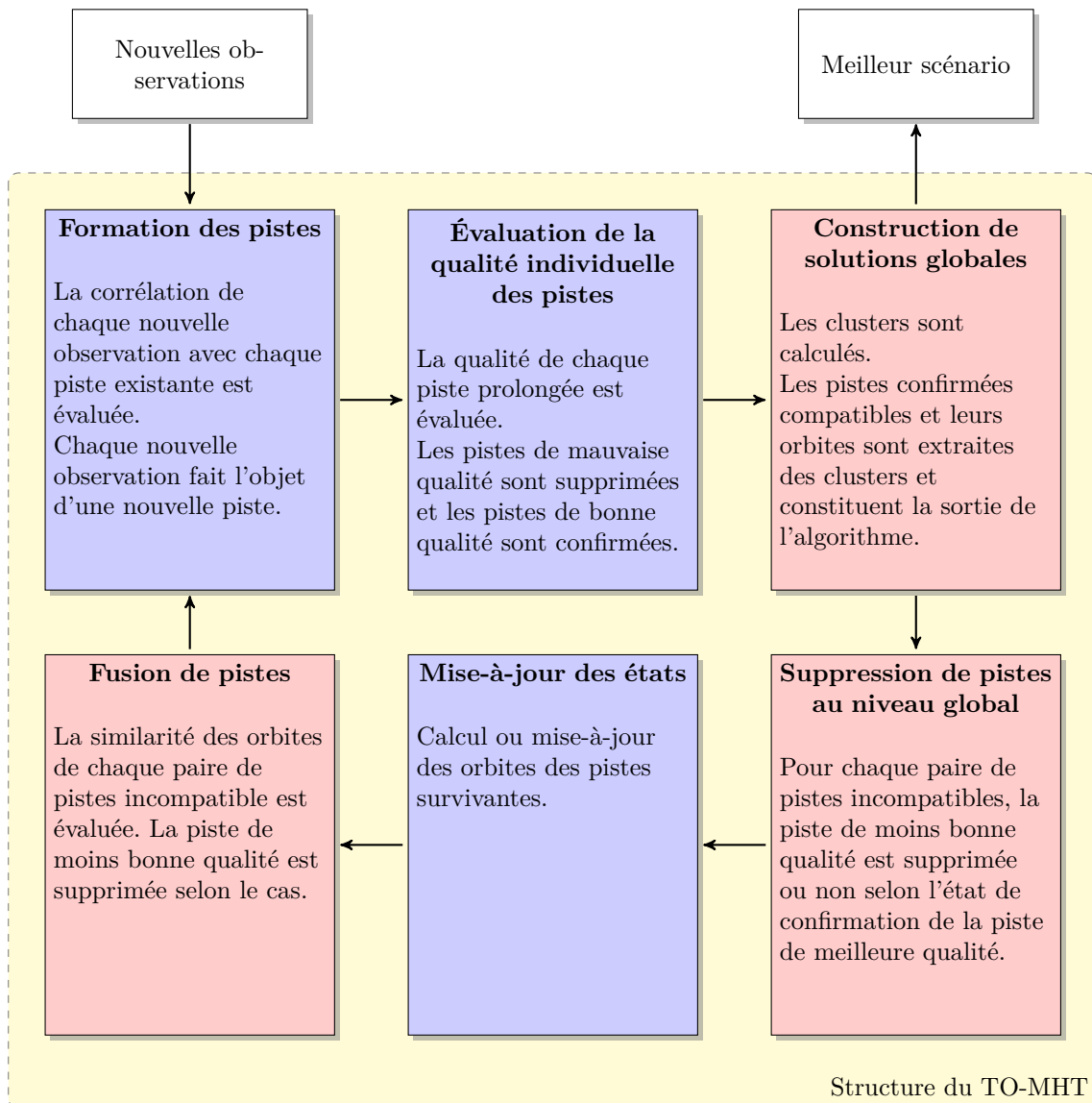
Cela se traduit algorithmiquement par la construction de clusters, c'est-à-dire d'ensembles de pistes dites "incompatibles" qui partagent une ou plusieurs observations, et dans la formulation d'une solution globale, c'est-à-dire de l'ensemble le plus vraisemblable de pistes dites "compatibles" qui ne partagent pas une même observation.

Pour gérer les cas de cibles confondues, des adaptations spécifiques peuvent être apportées mais cela dépasse le cadre de notre étude.

### 8.1.2 Principe

Le principe du TO-MHT est de garder en mémoire un grand nombre d'hypothèses d'association tant qu'aucune n'est suffisamment vraisemblable, c'est-à-dire de retarder les décisions de suppression de pistes jusqu'à ce que des observations informatives soient acquises. Pour cela, le TO-MHT prolonge des pistes existantes avec de nouvelles observations grâce à une fonction de fenêtrage. Dans un second temps, la qualité de chaque piste (séquence d'observations) est individuellement évaluée par une fonction de score décrite dans la Section 8.1.4. Les pistes survivantes sont alors combinées en clusters, puis en solutions globales dont on évalue la qualité pour éliminer les pistes dites de faible occurrence. Enfin, les états des pistes survivantes sont mis à jour grâce aux observations nouvellement associées et les pistes similaires sont fusionnées. Ce processus itératif est décrit par la Figure 8.1.

Parmi les blocs fonctionnels présentés dans la Figure 8.1, on peut distinguer les blocs relatifs à un traitement individuel des pistes, c'est-à-dire les fonctions utilisées provenant d'algorithmes de pistage monocible. Le choix de ces fonctions est donc libre et doit être fait selon les particularités du problème. Rappelons que nous avons justifié au Chapitre 4 le choix d'une méthode de Gauss-Newton pour la mise-à-jour



**Figure 8.1** – Schéma bloc représentant les principales étapes du TO-MHT. Les blocs bleus traitent les pistes individuellement tandis que les blocs roses traitent des ensembles de pistes. La souplesse de cette algorithmne permet d'insérer et d'implémenter facilement des blocs fonctionnels comme par exemple une fonction de fusion de pistes.

des états des pistes initialisées et une transformation non-parfumée pour le fenêtrage.

### 8.1.3 Formation des pistes

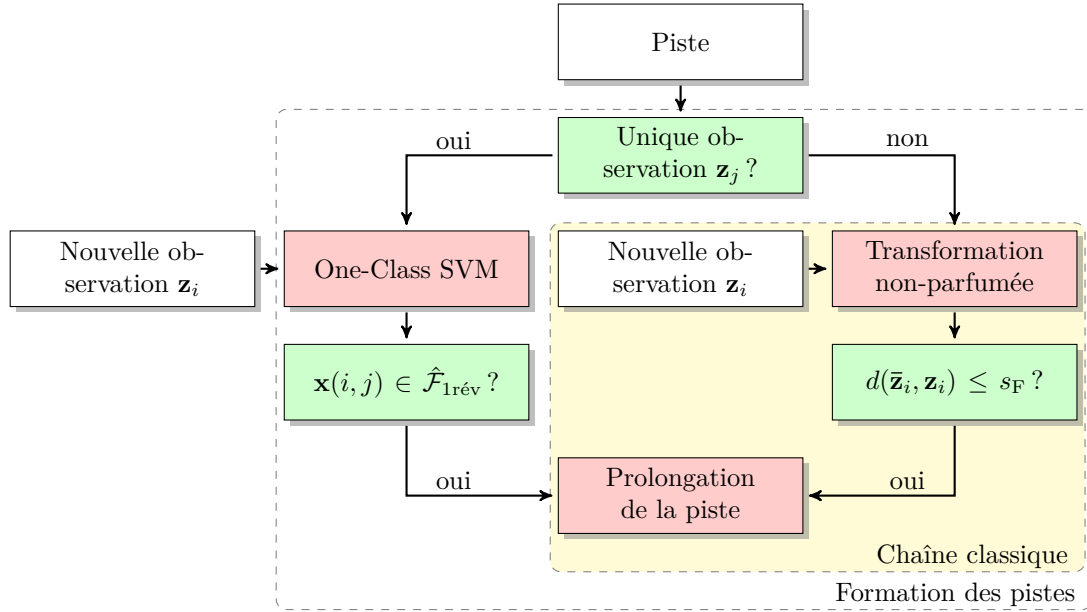
L'étape de formation des piste comprend deux fonctions : la création de nouvelles pistes et la prolongation de pistes existantes.

Créer une nouvelle piste consiste dans notre cas à une simple mise en mémoire de la nouvelle observation sous la forme d'une nouvelle piste contenant une unique observation. En revanche, associer les détections issues d'une même traversée permet

d'avoir à initialiser moins de nouvelles pistes. Dans cette étude, cette association est faite de proche en proche comme le décrit l'Annexe D.

Les pistes sont prolongées en levant la condition selon laquelle une observation ne peut être issue de deux cibles distinctes. Par conséquent, on autorise les nouvelles observations à prolonger plusieurs pistes existantes, quitte à respecter à nouveau cette condition lors de la combinaison de pistes en solutions globales.

Nous intégrons ici la méthode d'initialisation présentée au Chapitre 6. Pour cela, nous distinguons les pistes selon le nombre d'observations. En effet, si une piste contient une unique observation, alors la méthode de fenêtrage présentée au Chapitre 6 est appliquée, c'est-à-dire que l'on teste l'assertion " $\mathbf{x}(i, j) \in \hat{\mathcal{F}}_{1\text{rév}}$ ". Si en revanche la piste contient au moins deux observations, alors elle dispose d'un état  $\mathbf{X}_4$  ou  $\mathbf{X}_7$  et d'une matrice de covariance  $\mathbf{P}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$  que l'on peut propager grâce à une transformation non-parfumée et dont on peut déduire une fenêtre de validation. Dans ce cas, c'est une distance statistique entre l'observation prédite  $\bar{\mathbf{z}}_i$  et la nouvelle observation  $\mathbf{z}_i$  que l'on compare à un seuil  $s_F$  (cf. Chapitre 4).



**Figure 8.2** – Détails du bloc de formation des pistes (cf. Figure 8.1). La chaîne classique représente la partie de l'algorithme traitée dans la littérature.

#### 8.1.4 Évaluation de la qualité individuelle des pistes

Chaque piste  $Z$  est constituée d'une séquence d'observations associées grâce à une fonction de fenêtrage donnant lieu au calcul de la probabilité  $p(Z|H_1)$  lorsqu'elle dispose d'une orbite estimée  $\mathbf{X}_7$ . Calculer le rapport de vraisemblance (score) entre l'hypothèse  $H_1$  et l'hypothèse  $H_0$  permet alors d'évaluer la qualité d'une piste  $Z$ . Dans cette étude, nous utilisons le logarithme d'un rapport de vraisemblance défini par l'équation (8.1) (rappel de l'équation (4.26)), où  $p(Z|H_1)$  est la probabilité des observations de la piste  $Z$  sachant qu'elles sont issues de la même cible (hypothèse

$H_1$ ) et  $p(Z|H_0)$  est la probabilité des observations de la piste  $Z$  sachant qu'elles sont toutes des fausses alarmes (hypothèse  $H_0 = \overline{H_1}$ ).

$$L = \ln \frac{p(Z|H_1)}{p(Z|H_0)} \quad (8.1)$$

La méthode classique du Sequential Probability Ratio Test (SPRT) [46] (*cf.* Section 4.3.2) est implémentée pour tirer avantage de ce score. Cette méthode consiste à comparer régulièrement le score associé à une piste  $Z$  à des seuils  $_{SSPRT,1}$  et  $_{SSPRT,2}$  afin de décider de sa suppression ou de sa confirmation.

La mise-à-jour du score se fait de manière récursive lorsqu'une nouvelle observation  $\mathbf{z}$  est associée à une piste existante  $Z$ , les bruits d'observation étant supposés indépendants [63] :

$$L_{k+1} = \ln \left( \frac{p(\mathbf{z}|H_1) \times p(Z|H_1)}{p(\mathbf{z}|H_0) \times p(Z|H_0)} \right) = \Delta L + L_k \quad (8.2)$$

avec l'incrément  $\Delta L$  tel que :

$$\Delta L = \ln \frac{p(\mathbf{z}|H_1)}{p(\mathbf{z}|H_0)} \quad (8.3)$$

La probabilité  $p(\mathbf{z}|H_1)$  est obtenue grâce à la distribution (supposée gaussienne) de l'observation prédite  $\bar{\mathbf{z}}$  :

$$p(\mathbf{z}|H_1) = \frac{e^{-d^2/2}}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{|\mathbf{S}|}} \quad (8.4)$$

où  $d$  la distance de Mahalanobis entre l'observation  $\mathbf{z}$  et l'observation  $\bar{\mathbf{z}}$  prédite à partir de la piste,  $|\mathbf{S}|$  est le déterminant de la matrice de covariance associée et  $M$  est la dimension du vecteur d'observation (c'est-à-dire 3 en l'occurrence).

La probabilité  $p(\mathbf{z}|H_0)$  est la densité d'observations dans la cellule de résolution du capteur dont le volume est  $V_C$  :

$$p(\mathbf{z}|H_0) = \frac{1}{V_C} \quad (8.5)$$

En définitive :

$$L_{k+1} = L_k + \begin{cases} \ln V_C - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{S}| - \frac{M \ln(2\pi) + d^2}{2} & \text{si la piste est prolongée} \\ \ln(1 - P_D) & \text{par une nouvelle observation,} \\ \ln(1 - P_D) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.6)$$

où  $P_D$  est la probabilité de détection du capteur.

### Score d'association lié à l'orbite circulaire

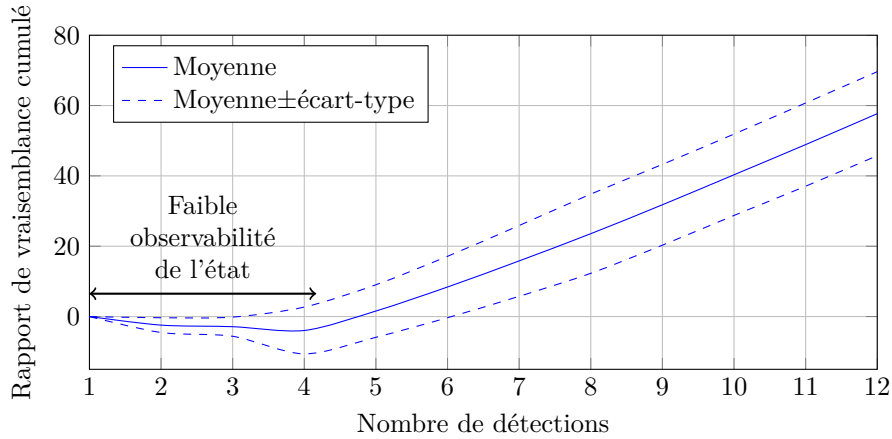
Le rapport de vraisemblance est un critère de qualité lorsque l'on dispose d'un état  $\mathbf{X}_7$  précis. Lorsque l'on dispose d'un état  $\{\hat{\mathbf{X}}_4, \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{X}}_4}\}$  (orbite circulaire nécessairement biaisée) déduit d'une paire d'observations par la méthode présentée au Chapitre 7, ce critère ne permet pas d'évaluer la qualité de l'association d'une troisième observation candidate car un biais apparaît dans la densité de probabilité de l'observation prédite  $\{\bar{\mathbf{z}}, \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{z}}}\}$ . Dans cette section, nous justifions le choix de ne pas évaluer la qualité d'une association tant qu'on ne dispose pas d'une orbite précise, c'est-à-dire tant qu'un algorithme de Gauss-Newton ne converge pas.

Pour cela, nous appliquons la méthode d'estimation d'orbite circulaire à un jeu d'observations issu de la simulation des objets du catalogue Space-Track et utilisons la transformation non-parfumée pour corrélér davantage d'observations à chaque piste initiale. À chaque nouvelle association, nous évaluons le score d'association  $L$  défini de manière classique par l'équation (8.7) :

$$L_{k+1} = L_k + \ln V_C - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{S}| - \frac{3 \ln(2\pi) + d^2}{2} \quad (8.7)$$

où  $L_k$  est le score de la piste avant l'association (nul pour l'association initiale),  $V_C$  le volume surveillé,  $|\mathbf{S}|$  le déterminant de la matrice de covariance de l'innovation  $\mathbf{S} = \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}} + \mathbf{P}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}$  et  $d$  la distance statistique telle que définie en équation (7.9).

Lorsqu'une nouvelle observation est associée à une piste existante, nous tentons d'estimer une orbite définitive  $\mathbf{X}_7$  et, en cas de convergence de l'algorithme de Gauss-Newton, nous l'utilisons pour associer les observations suivantes et évaluer le score d'association.



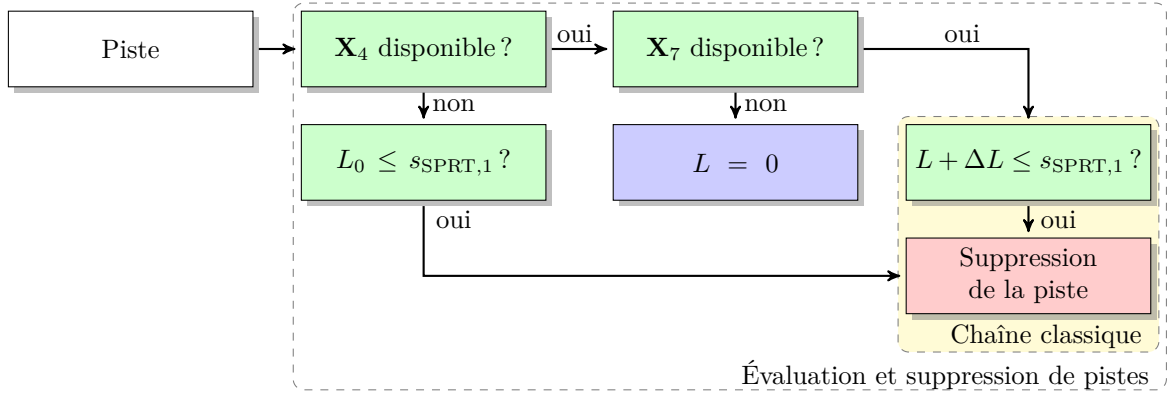
**Figure 8.3** – Dans cette simulation, c'est en général la quatrième observation qui permet la convergence de l'algorithme de Gauss-Newton. Les pistes de deux ou trois observations utilisent un état  $\mathbf{X}_4$  tandis que les pistes de quatre observations ou plus utilisent un état  $\mathbf{X}_7$  pour l'association de nouvelles observations.

La Figure 8.3 représente le score cumulé en fonction de la longueur de la piste pour les pistes correctes. Nous observons que le score cumulatif stagne autour de zéro (voire diminue légèrement en moyenne) pour les pistes contenant moins de quatre

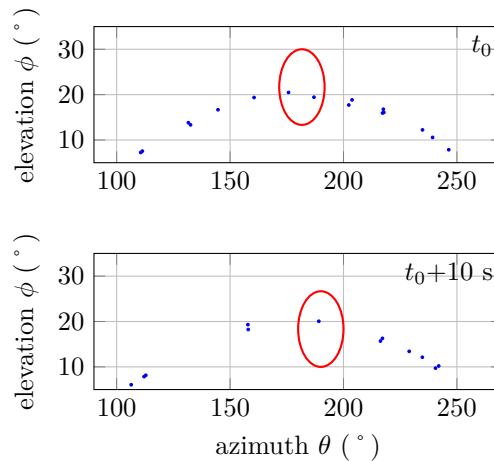
observations. Cela exprime le biais de l'estimation de l'orbite circulaire : le score ne fournit pas un indicateur fiable de la qualité de la piste dans ce cas. Lorsque l'on dispose d'au moins quatre observations, l'algorithme de Gauss-Newton converge dans la plupart des cas et les incréments de score associés aux observations suivantes sont élevés.

On déduit de cette analyse que le rapport de vraisemblance n'est pas pertinent si l'on ne dispose que d'une orbite circulaire (biaisée). Nous faisons donc le choix d'ignorer ce score dans la discrimination des pistes tant que le critère de convergence n'est pas respecté, en testant la convergence d'un algorithme de Gauss-Newton et en comparant l'erreur quadratique  $\varepsilon_Q$  à un seuil  $s_\varepsilon$ .

Pour éviter de supprimer ou de confirmer des pistes à tort, le rapport de vraisemblance  $L$  n'est pas incrémenté tant qu'un état complet, c'est-à-dire un vecteur d'état  $\mathbf{X}_7$ , n'est pas disponible ( $L$  reste alors nul).



**Figure 8.4** – Détails du bloc d'évaluation et suppression de pistes (cf. Figure 8.1).



**Figure 8.5** – Exemple de fenêtre (rouge) validant des observations (bleu) sur des scans successifs. Le processus de suppression représenté en Figure 8.4 ne doit pas être effectué après la première association, mais après un temps de latence  $t_{\text{latence}}$  sous peine de supprimer à tort la piste qui pourrait être prolongée par une observation du second scan.

Le processus représenté sur la Figure 8.4 ne doit pas être effectué à chaque scan



pour chaque piste. En effet, les objets sont hors du champ de veille la plupart du temps et les pistes sont par conséquent rarement mises à jour. De plus, les fenêtres de validation peuvent comprendre une zone de l'espace surveillée et une zone hors champ de veille. Ce processus d'évaluation de qualité de piste doit alors être effectué avec une certaine latence  $t_{\text{latence}}$  pour éviter la suppression d'une piste causée à tort par une mauvaise association alors qu'une association correcte est possible aux scans contigus. Nous avons déterminé empiriquement que la valeur  $t_{\text{latence}} = 10$  mins convenait.

Par ailleurs, les observations prédites et leurs fenêtres de validation sont la plupart du temps hors du champ de veille. Dans ces cas, la probabilité  $P_D$  est nulle et l'incrément de score  $\Delta L$  est par conséquent nul également. Une piste peut alors survivre très longtemps car la "certitude" d'une non-détection se présente rarement. Nous choisissons alors d'imposer un délai d'expiration : si une piste ne dispose pas d'un vecteur d'état  $\mathbf{X}_7$  après une certaine durée  $t_{\text{exp.}}$ , alors cette piste est supprimée. Nous avons déterminé qu'un objet passe en moyenne 3 fois dans le champ de veille en l'espace de 24 heures. Le choix  $t_{\text{exp.}} = 24$  h permet alors une suppression efficace des pistes non-prolongées. Intuitivement, une piste d'observations issues d'un même objet serait supprimée à tort en phase d'initialisation avec une probabilité de  $(1 - P_D)^2$  qui correspond à la non-détection de deux passages suivant une première détection.

### 8.1.5 Construction de solutions globales

Une solution globale  $\mathcal{S}$  à un instant  $k$  à un problème de pistage multicible est un ensemble de pistes  $Z$  respectant la contrainte qu'aucune observation ne soit comprise simultanément dans plusieurs pistes.

En pratique, les pistes existantes sont réparties en clusters [32] afin de traiter séparément plusieurs problèmes indépendants plus petits : un cluster est en effet un ensemble de pistes liées directement ou indirectement par une ou plusieurs observations communes. Par exemple, si une piste  $Z_1$  partage une ou plusieurs observations avec une piste  $Z_2$  et que  $Z_2$  partage une ou plusieurs observations avec une piste  $Z_3$ , alors les pistes  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$  sont dans le même cluster, que  $Z_1$  et  $Z_3$  partagent une observation commune ou non.

La solution globale  $\mathcal{S}$  permettant d'identifier le scénario réel est obtenue par agrégation de solutions faisables (pistes ne partageant pas d'observations entre elles) propres à chaque cluster. De nombreuses solutions étant possibles, un critère permettant d'ordonner les solutions faisables est défini : un score peut être associé à chaque solution globale obtenue  $\mathcal{S}$  afin de fournir en sortie de l'algorithme la meilleure solution. Le score  $L_{\mathcal{S}}$  est défini par la somme des scores des pistes contenues dans la solution  $\mathcal{S}$  :

$$L_{\mathcal{S}} = \sum_{Z \in \mathcal{S}} L_Z \quad (8.8)$$

La log-vraisemblance n'étant pas un bon critère de qualité pour les pistes en cours

d'initialisation, nous ne considérons que les pistes confirmées (c'est-à-dire avec un score supérieur au seuil  $s_{\text{SPRT},2}$  et donc *a fortiori* permettant la convergence d'un algorithme de Gauss-Newton) pour construire les solutions globales et choisir la meilleure.

### 8.1.6 Suppression de pistes au niveau global

Il s'agit ici d'évaluer la pertinence d'une piste vis-à-vis des autres pistes existantes. Pour cela, plusieurs méthodes sont possibles. La méthode du  $N$ -scan pruning consiste à supprimer les ramifications d'une piste antérieures à une date fixée en fonction de la date de la dernière observation associée à la piste de meilleur score. Une autre approche consiste à supprimer des pistes selon leur probabilité au niveau "global", c'est-à-dire en prenant en compte l'interférence avec les autres pistes incompatibles ou pouvant coexister. Ces deux méthodes fournissent de bons résultats dans de nombreux problèmes de pistage multicible, mais nous déterminons dans cette section que la seule l'approche  $N$ -scan pruning est adaptée à notre cas en raison du comportement particulier de la log-vraisemblance individuelle des pistes (*cf.* Section 8.1.4).

La définition d'une structure de données pour les pistes est nécessaire à la compréhension de la méthode  $N$ -scan pruning.

#### Structure de données des pistes

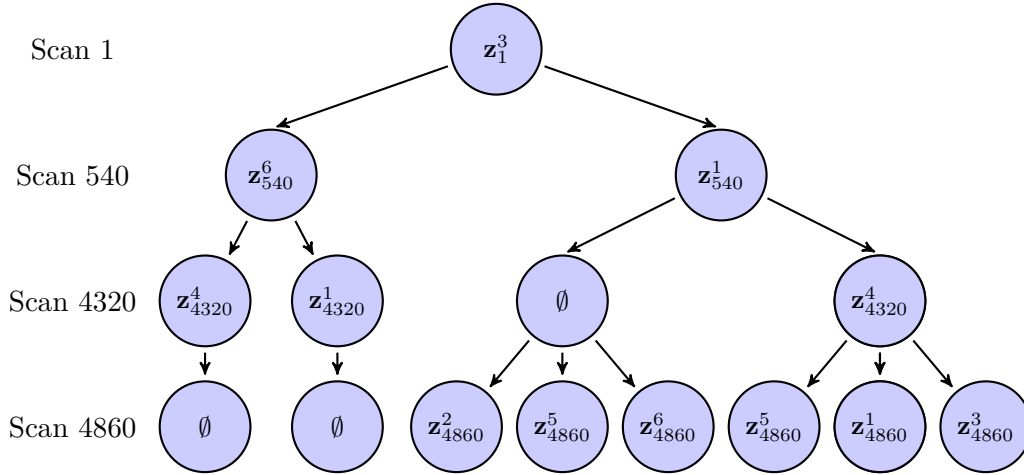
Une piste  $Z$  est une suite d'observations associées  $\mathbf{z}$  sur plusieurs scans (les scans sont en général non-contigus car les observations sont isolées). Une structure d'arbre (graphe acyclique orienté) permet d'organiser les pistes de manière efficace. En effet, les observations pouvant être référencées dans plusieurs pistes, elles sont organisées en arborescences dont chaque chemin du sommet à une feuille constitue une piste.

Cette structure de données permet de garder en mémoire plusieurs hypothèses d'association le temps d'accumuler suffisamment d'information pour discriminer la piste la plus vraisemblable. Notons  $\mathbf{z}_k^j$  la  $j$ -ème observation du  $k$ -ème scan et  $Z_i$  représente la  $i$ -ème piste d'un ensemble.

La Figure 8.6 fournit un exemple d'arborescence dont le sommet est la 3<sup>ème</sup> observation du scan 1. Cet ensemble de pistes ne peut correspondre qu'à un seul objet au plus (celui dont est issue l'observation  $\mathbf{z}_1^3$ ). Pour l'objet représenté par cette piste, huit pistes sont possibles et exclusives les unes des autres :

- $Z_1 : \mathbf{z}_1^3 - \mathbf{z}_{540}^6 - \mathbf{z}_{4320}^4$ ,
- $Z_2 : \mathbf{z}_1^3 - \mathbf{z}_{540}^6 - \mathbf{z}_{4320}^1$ ,
- $Z_3 : \mathbf{z}_1^3 - \mathbf{z}_{540}^1 - \mathbf{z}_{4860}^2$ ,
- $Z_4 : \mathbf{z}_1^3 - \mathbf{z}_{540}^1 - \mathbf{z}_{4860}^5$ ,
- $Z_5 : \mathbf{z}_1^3 - \mathbf{z}_{540}^1 - \mathbf{z}_{4860}^6$ ,
- $Z_6 : \mathbf{z}_1^3 - \mathbf{z}_{540}^1 - \mathbf{z}_{4320}^4 - \mathbf{z}_{4860}^5$ ,
- $Z_7 : \mathbf{z}_1^3 - \mathbf{z}_{540}^1 - \mathbf{z}_{4320}^4 - \mathbf{z}_{4860}^1$ ,
- $Z_8 : \mathbf{z}_1^3 - \mathbf{z}_{540}^1 - \mathbf{z}_{4320}^4 - \mathbf{z}_{4860}^3$ .

Ces pistes peuvent également ne représenter aucun objet notamment si l'observation



**Figure 8.6** – Exemple d'arborescence. Les pistes ne sont pas nécessairement prolongées avec des observations à chaque scan.

$z_1^3$  est une fausse alarme.

### ***N*-scan pruning**

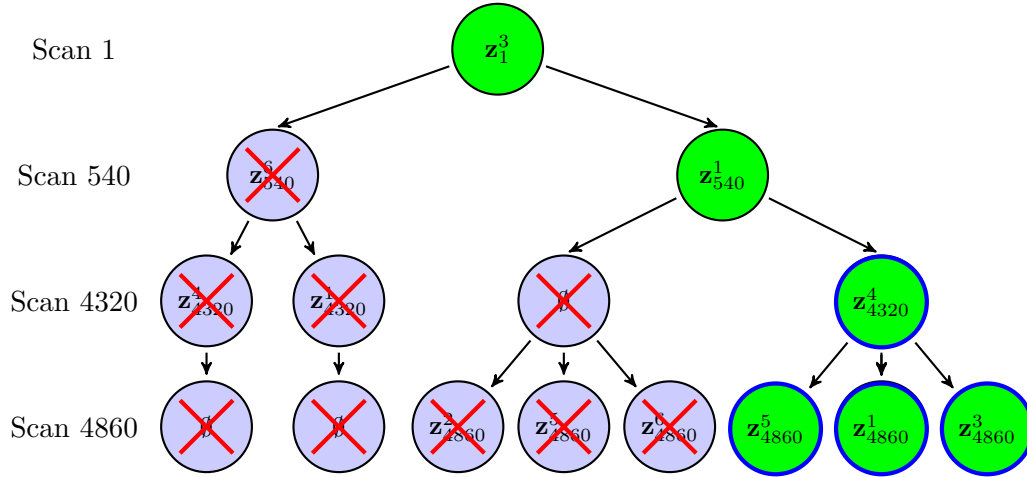
Le *N*-scan pruning est une méthode empirique qui consiste à supprimer les ramifications antérieures aux *N* associations donnant lieu à la piste de meilleur score : il est en effet possible qu'une piste confirmée soit associée avec une fausse alarme, ce qui peut alors provoquer une divergence de l'algorithme de Gauss-Newton lors de la mise-à-jour de l'état et entraîner ainsi la suppression de la piste et la perte d'un objet déjà catalogué. Pour éviter cela, il convient de permettre la prolongation d'une piste à partir de son dernier élément mais également à partir des éléments situés en amont (jusqu'à un certain rang *N*).

Dans notre cas, choisir  $N = 2$ , c'est-à-dire autoriser les ramifications d'une piste confirmée pour les deux derniers éléments de la piste, suffit. Notons également que dans le cas classique, les éléments constituant une piste appartiennent à des scans successifs, ce qui n'est en général pas le cas dans un contexte d'observations isolées.

L'algorithme de *N*-scan pruning proposé dans [17] initialise de nouvelles pistes à partir des nœuds supprimés dans notre exemple de la Figure 8.7. Cela n'est pas jugé utile dans notre étude étant donné la grande vraisemblance des pistes confirmées.

### **Suppression des pistes selon leur probabilité au niveau global**

Confronter les pistes issues de solutions faisables  $\{\mathcal{S}_i\}$  peut se faire en général par le calcul d'une probabilité d'occurrence dans les solutions obtenues grâce à l'équation (8.9), où *J* désigne le nombre de solutions extraites du cluster et  $L_{\mathcal{S}_i}$  le score de la solution  $\mathcal{S}_i$ .



**Figure 8.7** – Exemple d’application du  $N$ -scan pruning sur une piste. Les nœuds verts forment les pistes confirmées, les nœuds entourés de bleu sont les extrémités des pistes que l’on s’autorise à prolonger (grâce aux états associés) et les nœuds barrés d’une croix rouge sont supprimés.

$$P(Z) = \sum_{\mathcal{S}_i \ni Z} \frac{e^{L_{\mathcal{S}_i}}}{1 + \sum_{j=1}^J e^{L_{\mathcal{S}_j}}} \quad (8.9)$$

Les pistes dont la probabilité d’occurrence est en dessous d’un certain seuil  $s_H$  peuvent alors être supprimées.

Nous voyons en Section 8.1.4 que la log-vraisemblance d’une piste en cours d’initialisation (disposant d’un vecteur d’état  $\mathbf{X}_4$ ) n’est pas représentative de la qualité d’association. Cela impacte fortement les performances de cette méthode de filtrage par calcul de probabilité “globale” : par exemple, il est possible voire fréquent de traiter un cluster contenant des pistes confirmées de scores égaux à 5, par exemple, et des pistes en cours d’initialisation, de scores nul (*cf.* Chapitre 7).

Exemple A : le cluster contient deux pistes incompatibles  $Z_1$  et  $Z_2$  (liées par une observation commune) de scores  $L_{Z_1} = 0$  et  $L_{Z_2} = 5$ . Trois solutions sont faisables :  $\mathcal{S}_1 = \{Z_1\}$ ,  $\mathcal{S}_2 = \{Z_2\}$ ,  $\mathcal{S}_3 = \{\emptyset\}$  et leurs scores sont  $L_{\mathcal{S}_1} = 0$ ,  $L_{\mathcal{S}_2} = 5$ ,  $L_{\mathcal{S}_3} = 0$ . Les probabilités globales de  $Z_1$  et de  $Z_2$  sont alors  $P(Z_1) = 0,007$  et  $P(Z_2) = 0,97$ .

Exemple B : le cluster contient deux pistes compatibles  $Z_1$  et  $Z_2$  (se trouvant dans le même cluster car une piste  $Z_3$  est incompatible avec  $Z_1$  et  $Z_2$ ) de scores  $L_{Z_1} = 0$  et  $L_{Z_2} = 5$ . Quatre solutions sont faisables à partir de  $Z_1$  et  $Z_2$  :  $\mathcal{S}_1 = \{Z_1\}$ ,  $\mathcal{S}_2 = \{Z_2\}$ ,  $\mathcal{S}_3 = \{Z_1, Z_2\}$ ,  $\mathcal{S}_4 = \{\emptyset\}$  et leurs scores sont  $L_{\mathcal{S}_1} = 0$ ,  $L_{\mathcal{S}_2} = 5$ ,  $L_{\mathcal{S}_3} = 5$ ,  $L_{\mathcal{S}_4} = 0$ . Les probabilités globales de  $Z_1$  et de  $Z_2$  sont alors  $P(Z_1) = 0,5$  et  $P(Z_2) = 0,99$ .

Dans ces deux exemples, nous constatons que le calcul de probabilité globale peut mener à une conclusion catégorique (Exemple A), c’est-à-dire que la piste de plus faible vraisemblance pourrait être supprimée car elle est incompatible avec une piste de forte vraisemblance, ou à une conclusion neutre (Exemple B) nullement informa-

tive. Une conclusion si catégorique est également peu informative compte tenu des scores individuels des pistes.

Les vraisemblances des pistes confirmées prenant de fortes valeurs, cette méthode reviendrait à supprimer toutes les pistes en cours d'initialisation (score faible) et incompatibles avec la piste de plus fort score, ce qui revient à réduire la piste entière à la première piste permettant la convergence d'un algorithme de Gauss-Newton suivie d'une association valide (l'incrément  $\Delta L$  est grand). Le même résultat serait obtenu avec une méthode de  $N$ -scan pruning pour  $N = 1$ .

Par conséquent, nous déduisons de ces exemples simples que le processus de suppression de pistes par calcul de probabilités globales n'est pas adapté dans un contexte de forte disparité de scores entre les pistes non-confirmées. Nous choisissons cependant de ne pas initialiser une piste à partir d'une observation si celle-ci est associée à une piste confirmée car le score d'une piste confirmée permet d'avoir une très grande certitude quant à la conformité des associations.

En revanche, la méthode du  $N$ -scan pruning, plus appropriée, est implémentée dans le cadre de cette étude.

### 8.1.7 Mise-à-jour des états

À chaque itération, les états des pistes prolongées et survivantes sont mis à jour :

- Quand la piste ne contient qu'une unique observation, l'état n'est pas calculable et aucune mise-à-jour n'est effectuée.
- Quand la piste contient deux observations, alors la méthode d'IOD présentée au Chapitre 6 est utilisée et la piste est dotée d'un vecteur d'état  $\mathbf{X}_4$  et d'une matrice de covariance associée.
- Quand la piste contient trois observations, alors un algorithme de Gauss-Newton est effectué avec pour valeur initiale  $\mathbf{X}_4$ . Dans le cas d'une convergence, la piste est dotée d'un vecteur d'état  $\mathbf{X}_7$ . Dans le cas d'une divergence selon les critères définis au Section 7.4, la troisième observation de la piste est dissociée.

### 8.1.8 Fusion de pistes

Un algorithme de pistage multicible peut générer des pistes redondantes, c'est-à-dire des pistes différentes produisant des états similaires ou proches associés à une même cible. Pour réduire au mieux le nombre de pistes redondantes, nous définissons une mesure de similarité (distance de Mahalanobis) [30] entre les états de deux pistes en utilisant les estimées des vecteurs d'état et des covariances associées : si cette similarité est supérieure à un certain seuil, alors la piste de plus faible score est supprimée.

D'autres algorithmes sont disponibles dans la littérature, comme par exemple des méthodes de réduction de mélange gaussien [64] qui consistent à trouver le mélange d'un minimum de gaussiennes qui représente le mieux le mélange gaussien obtenu à partir des états d'un ensemble de pistes, mais le besoin (modeste) de fusion de

pistes pour l'implémentation du TO-MHT ne justifie pas l'utilisation de méthodes aussi sophistiquées.

Dans le cadre de cette étude, nous renonçons à fusionner les pistes en cours d'initialisation car les états calculés sont biaisés. Cela implique d'une part un biais dans la distance de Mahalanobis si celle-ci est utilisée comme mesure de similarité et d'autre part que l'on ne dispose pas d'un outil d'évaluation de qualité performant. En revanche, la distance de Mahalanobis et la log-vraisemblance fournissent une approche efficace pour la fusion éventuelle de deux pistes confirmées, car ces pistes sont dotées d'états bien définis et peu biaisés sur des fenêtres de temps relativement larges (quelques jours). Cette dernière approche est implémentée dans le cadre de cette étude et permet une fusion de pistes efficace.

## 8.2 Évaluation des performances

L'implémentation proposée est mise en œuvre pour cataloguer un échantillon d'objets issus du catalogue Space-Track. Les détections de ces objets sont simulés dans l'hypothèse du capteur défini au Chapitre 2 : nous simulons les observations issues d'un radar sol fournissant des mesures de position  $(\rho, \theta, \phi)$  avec des précisions de  $\sigma_\rho = 30$  m et  $\sigma_\theta = \sigma_\phi = 0,2^\circ$ , situé à  $45^\circ$  N et dont la ligne de visée est orientée vers le Sud avec une élévation de  $20^\circ$ , utilisant un FOR de  $160^\circ \times 2^\circ$  avec une période de revisite de 10 s et un taux de fausse alarme de 1 FA/s.

### 8.2.1 Choix des critères d'évaluation

Quatre critères principaux d'évaluation de performances pour un algorithme de catalogage : la couverture, le coût de calcul, la précision et la réactivité (*cf.* Problématique).

Dans cette étude, nous nous concentrons sur les objets non-manœuvrants car les objets manœuvrants peuvent être suivis par des systèmes existants. La réactivité n'est donc pas *a priori* le premier critère à satisfaire car la dynamique des débris spatiaux est relativement déterministe. En revanche, cela est à nuancer car détecter l'apparition de nouveaux débris le plus tôt possible peut être utile tant dans un contexte civil que militaire. La précision des orbites en sortie d'un algorithme de catalogage pourrait quant à elle être améliorée grâce à des méthodes d'estimation plus efficaces ou à un modèle dynamique plus précis, ce qui n'est pas le centre de nos préoccupations dans cette étude. Les critères de couverture et de coût de calcul sont alors nos principaux critères de performance.

Dans cette thèse, la couverture est évaluée en mesurant la proportion d'objets catalogués (*i.e.* dont les pistes sont initialisées et mises à jour) en fin de simulation vis-à-vis du nombre d'objets simulés observés au moins une fois par le capteur. Sachant que les objets du catalogue Space-Track sont issus d'un système de capteurs réel (le SSN américain, *cf.* Chapitre 1), cataloguer 100% de ces objets en simulation reviendrait à atteindre les performances effectives du SSN américain en termes de

couverture. L'évolution temporelle de ce rapport permet également d'évaluer la réactivité dans une certaine mesure en mesurant le temps nécessaire pour atteindre une certaine proportion d'objets catalogués.

Quant au coût de calcul, il est reflété dans une certaine mesure par la mémoire occupée par les pistes confirmées ou en cours d'initialisation, c'est-à-dire le nombre instantané d'hypothèses d'association à traiter. Évaluer le coût de calcul n'étant pas trivial, nous consacrons le Chapitre 9 à son étude.

D'autres critères moins essentiels, tels que le taux de redondance ou la pureté des pistes (taux de fausses alarmes dans une piste confirmée), permettent de garantir le bon fonctionnement de l'algorithme dans son ensemble.

### 8.2.2 Choix des scénarios de test

Avec en moyenne quatre passages dans le champ de veille par objet en 32 heures, simuler des objets du catalogue Space-Track sur une période de 6 jours est suffisant.

Afin de pouvoir effectuer les tests en un temps raisonnable, nous simulons des échantillons de plusieurs centaines (400, 500, 600, 700 et 800) d'objets issus du catalogue Space-Track. Ces objets sont choisis tels qu'ils sont tous observés sur des scans contigus lors de la simulation de la totalité des objets du catalogue Space-Track. Cela permet d'éviter les objets qui seraient sur des orbites en opposition de phase et qui ne constitueraient pas une difficulté de pistage. Dans cette logique, nous avons sélectionné tous les objets passant dans le champ de veille du capteur simulé sur une durée d'environ 9 minutes.

### 8.2.3 Dégradation des observations

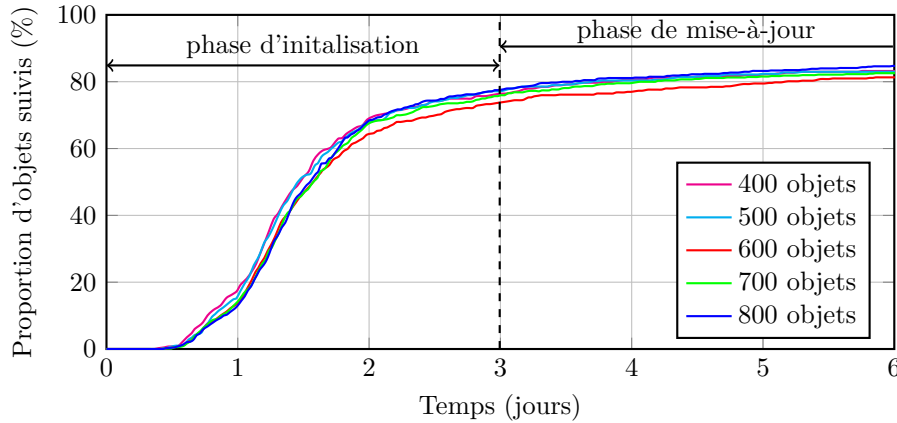
Le capteur fournit des observations de position  $(\rho, \theta, \phi)$  associées à des erreurs de mesure à  $\sigma_\rho=30$  m et  $\sigma_\theta = \sigma_\phi=0,2^\circ$ . Les observations simulées sont individuellement bruitées (bruit gaussien) de manière indépendante sur chaque dimension. Une étude de robustesse au bruit de mesure en distance  $\sigma_\rho$  est conduite en Section 8.2.6 car la précision de la mesure en distance est conditionnée par la largeur de bande disponible pour l'émission du signal radar, ce qui peut avoir un impact important sur la faisabilité du système compte tenu de contraintes environnementales.

Nous fixons également un taux de Fausse Alarme (FA) de 1 FA/s équivalent à 10 FA/Scan en moyenne. 10 FA sont donc ajoutées sur chaque scan contenant au moins une détection issue d'un objet. Cela permet d'éviter de traiter des scans ne contenant que des FA tout en gardant une densité de détection élevée sur les scans informatifs : quand l'ensemble des objets du catalogue est simulé (environ 11 000 objets en orbite basse), on obtient en moyenne 18,95 détections par scan (8,95 détections sont alors issues d'un objet) et nous obtenons 11,26 détections par scan dans le cas d'un échantillon de 500 objets, ce qui est du même ordre de grandeur.

Enfin, la probabilité de détection est fixée à  $P_D = 1$  dans un premier temps, et une étude de robustesse aux valeurs non-unitaires de  $P_D$  est menée par la suite en

### 8.2.4 Évolution temporelle des critères de performance principaux

**Couverture** À chaque instant simulé, nous évaluons le nombre d’objets catalogués et suivis rapporté au nombre total d’objets simulés sans redondance. L’évolution temporelle de la proportion obtenue est représentée en Figure 8.8.



**Figure 8.8** – Évolution temporelle du taux d’objets catalogués sans redondance.

Nous observons trois phases dans l’évolution du taux d’objets suivis au cours du catalogage :

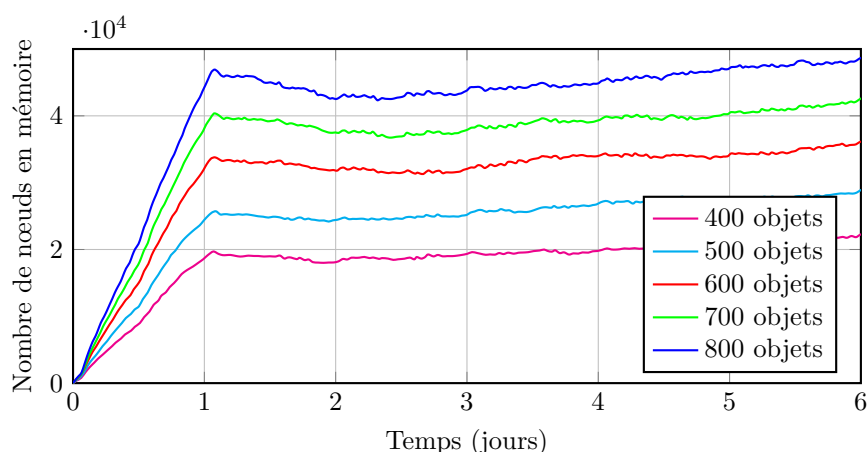
- une phase d’amorçage entre 0 et 0,5 jours, pendant laquelle les pistes sont formées et accumulées sans qu’aucune piste ne dispose d’assez d’observations pour que sa qualité soit jugée suffisante pour la confirmer,
- une phase de transition entre 0,5 et 3 jours (formant une phase d’initialisation avec la phase d’amorçage), pendant laquelle la majorité des objets sont catalogués,
- une phase de mise-à-jour à partir de 3 jours, pendant laquelle les objets catalogués sont suivis et maintenus, tandis que de nouveaux objets donnant lieu à des observations moins fréquentes sont acquis progressivement.

En 6 jours de temps simulé, nous atteignons dans tous les scénarios un taux d’objets catalogués de l’ordre de 85%. Cela est pertinent avec le taux de rappel obtenu dans l’évaluation de la méthode d’initialisation (86,29%) présentée au Section 7.5. Ce résultat ne permet pas d’estimer une valeur de couverture maximale ; il faudrait pour cela effectuer des simulations sur des intervalles de temps plus longs.

**Mémoire utilisée** Le nombre de nœuds contenus dans l’ensemble des pistes existantes (*cf.* Figure 8.6) est évalué à chaque instant.

Nous constatons que dans tous les scénarios le nombre de nœuds mémorisés stagne après environ 1 jour de temps simulé. Cela correspond au temps d’expiration  $t_{\text{exp}}$ , fixé à 24 h qui permet la suppression de pistes en cours d’initialisation n’étant corrélée à





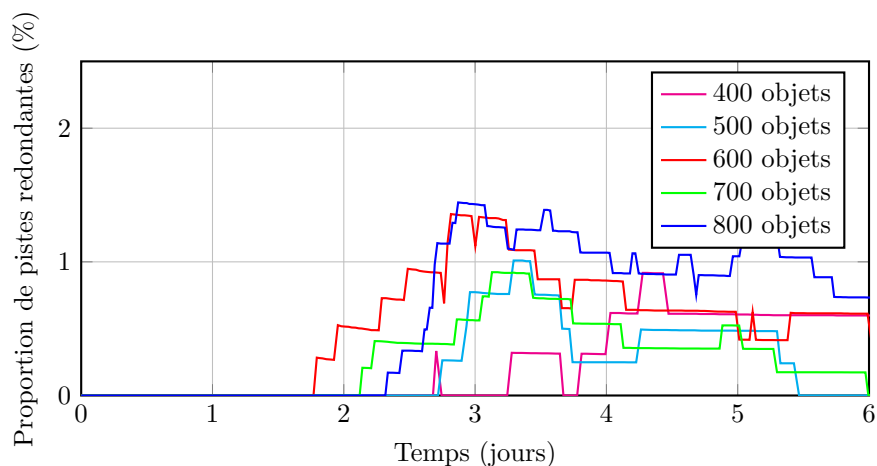
**Figure 8.9** – Évolution temporelle du nombre de nœuds gardés en mémoire au cours du catalogage.

aucune nouvelle observation dans un intervalle de temps  $t_{\text{exp.}}$ . Ces courbes prouvent que la suppression de pistes permet de garder sous contrôle la mémoire nécessaire à l'algorithme.

### 8.2.5 Évolution temporelle des critères de performance annexes

Quelques critères annexes permettent de vérifier le bon fonctionnement de l'algorithme implémenté tels que la redondance et les pertes de pistes confirmées.

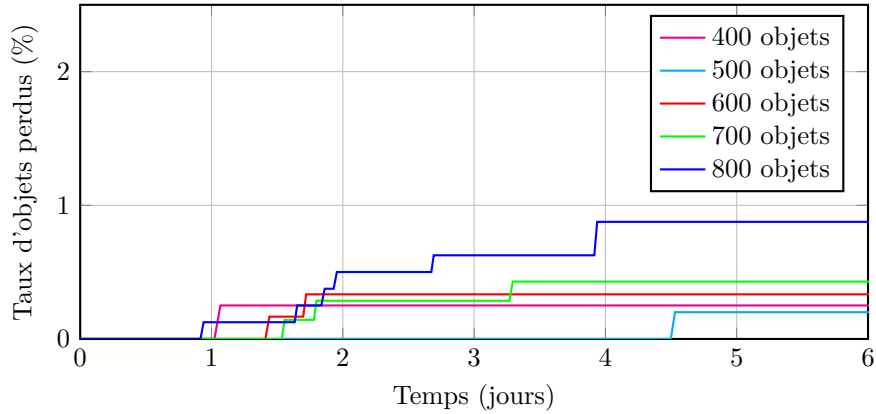
**Redondance** Nous évaluons la redondance des pistes confirmées, c'est-à-dire la proportion de pistes se rapportant à un même objet dans le scénario le plus vraisemblable.



**Figure 8.10** – Proportion de pistes se rapportant à un même objet dans le scénario le plus vraisemblable.

La redondance reste inférieure à 1% sur la plupart du temps et tend à diminuer en fin de simulation. Ce paramètre prouve le bon fonctionnement des fonctions de fusion de pistes, notamment.

**Pertes** Le taux de pertes (c'est-à-dire le taux d'objets suivis puis perdus) permet d'évaluer la robustesse de la méthode de suivi des objets.



**Figure 8.11** – Taux d'objets perdus cumulé.

Nous observons un taux de pertes très faible : en effet, le taux de perte moyen sur 6 jours pour le scénario le plus défavorable (800 objets) est inférieur à 1% du cumul des pistes confirmées appartenant au scénario le plus vraisemblable au cours de la simulation. Ce paramètre est de plus pessimiste car il ne tient pas compte des objets re-catalogués par la suite.

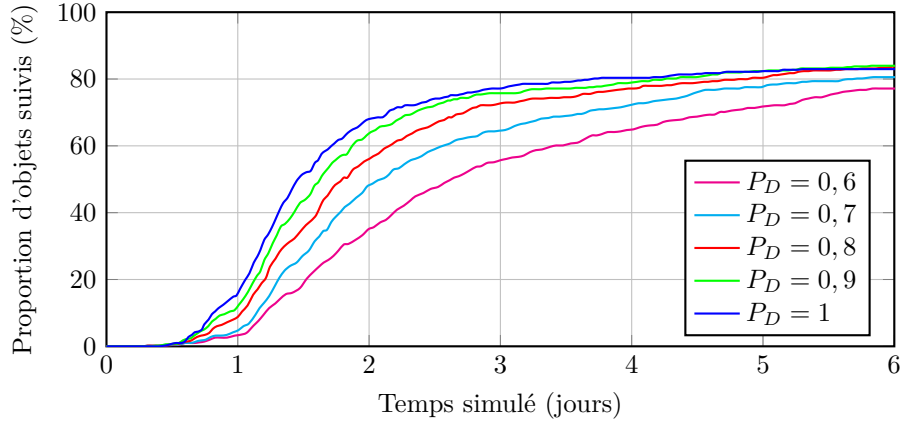
## 8.2.6 Sensibilité des paramètres de dimensionnement du radar

**Influence de la probabilité de détection moyenne  $P_D$**  Il s'agit ici d'évaluer l'impact d'une dégradation du Rapport Signal à Bruit (RSB), ou d'une diminution de la puissance émise, qui se traduit par une diminution de la probabilité de détection moyenne  $P_D$  (associée à un RSB et une distance de référence).

Notons que la probabilité de détection dépend de nombreux facteurs liés au radar, aux conditions d'observation ainsi qu'à l'objet lui-même et notamment à sa Surface Équivalente Radar (SER). Dégrader le RSB peut donc conduire à rendre inaccessibles certains objets de SER faible. Cependant, supposer que la probabilité de détection associée à chaque situation est égale à une probabilité de détection moyenne  $P_D$  nous permet de ne pas dimensionner d'autres paramètres du radar. Nous évitons ainsi de faire d'autres choix de dimensionnement qui constitueraient autant d'hypothèses fortes.

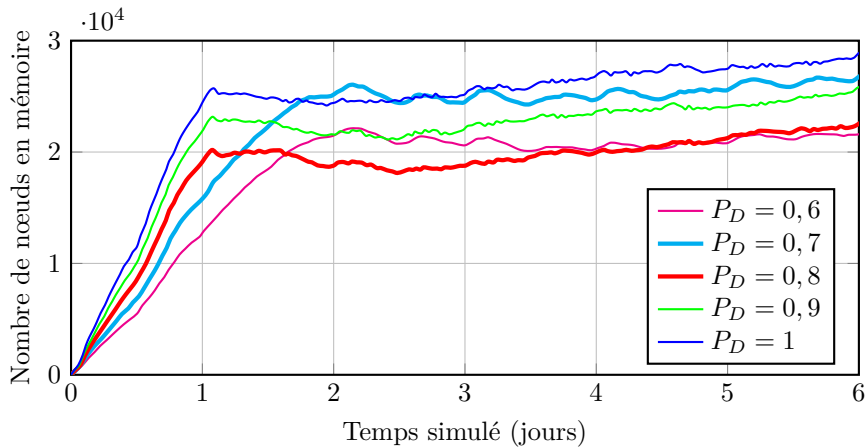
Les performances de l'algorithme en fonction de la probabilité de détection moyenne  $P_D$  sont alors évaluées dans un but de conception pour déterminer une valeur de

$P_D$  permettant un catalogage conforme à des spécifications éventuelles et en déduire (si le même travail est effectué pour déterminer une valeur de probabilité de fausse alarme  $P_{FA}$ ) une valeur de RSB conditionnant la conception du capteur physique.



**Figure 8.12** – Évolution du nombre d'objets catalogués en fonction du temps pour différentes probabilités de détection pour un scénario de 500 objets.

Nous observons sur les courbes de la Figure 8.12 qu'une probabilité de détection moyenne  $P_D$  plus faible dégrade principalement la réactivité du système de catalogage simulé. En effet, une diminution de la probabilité de détection fait diminuer le taux de couverture final (à la fin des 3 jours simulés) de quelques points de pourcentage dans nos hypothèses de travail.

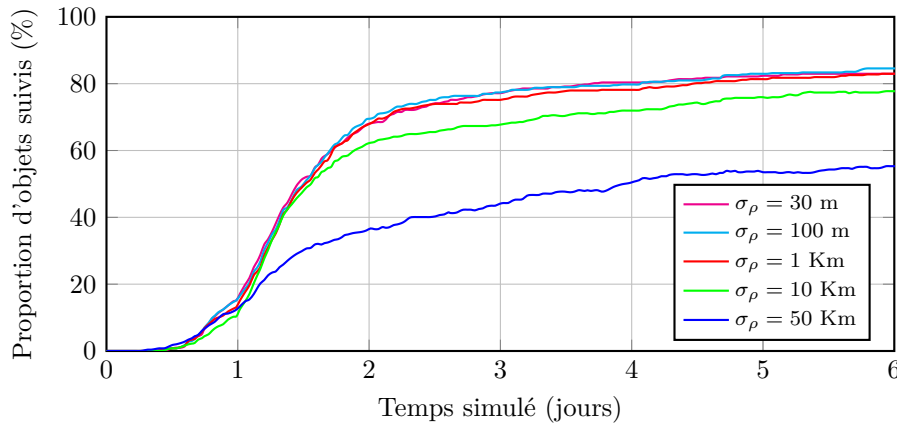


**Figure 8.13** – Évolution temporelle du nombre de nœuds gardés en mémoire au cours du catalogage pour différentes probabilités de détection pour un scénario de 500 objets.

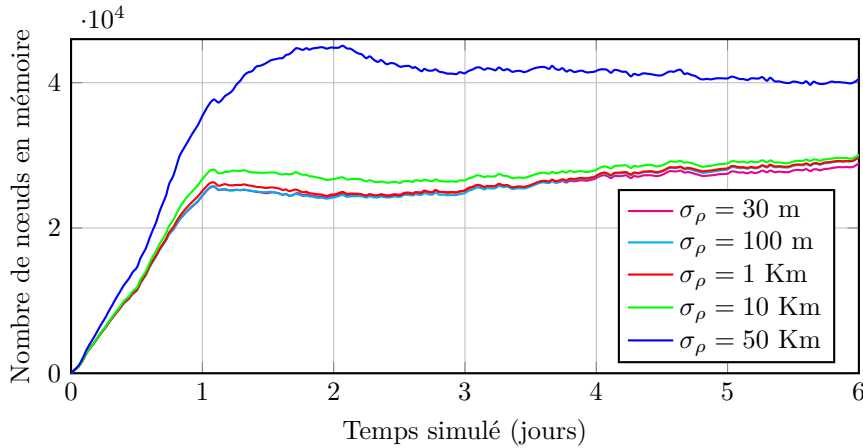
La Figure 8.13 met en évidence deux phénomènes : pour  $P_D$  compris entre 1 et 0,8, on observe une diminution du nombre de nœuds gardés en mémoire que l'on peut attribuer à la diminution du nombre d'observations disponibles ; pour  $P_D$  compris entre 0,8 et 0,7, on observe une progression plus lente vers un palier plus élevé. On en déduit par conséquent qu'il existe une valeur critique de  $P_D$  comprise entre 0,7 et

0,8 qui dégrade non seulement la réactivité mais augmente également la complexité combinatoire.

**Influence de la précision de mesure de distance  $\sigma_\rho$**  La précision de la mesure en distance dépend de la bande de fréquence disponible pour le signal émis. Celle-ci est en général allouée en fonction de paramètres extérieurs comme par exemple des contraintes environnementales. L'étude de la robustesse de l'algorithme à la dégradation de la précision de mesure en distance permet alors de déterminer la précision en distance minimale (et donc la plus petite bande en fréquence) nécessaire au bon fonctionnement de l'algorithme de catalogage.



**Figure 8.14** – Évolution du nombre d'objets catalogués en fonction du temps pour différentes précisions en mesure de distance pour un scénario de 500 objets.



**Figure 8.15** – Évolution temporelle du nombre de nœuds gardés en mémoire au cours du catalogage pour différentes précisions en mesure de distance pour un scénario de 500 objets.

Les performances de l'algorithme sont maintenues pour les valeurs de  $\sigma_\rho$  inférieures à 1 Km et sont légèrement dégradées pour  $\sigma_\rho = 10$  Km. Les performances chutent pour  $\sigma_\rho = 50$  Km. Pour  $\sigma_\rho = 50$  Km, nous constatons par ailleurs que le taux

d'objets suivis cumulé (c'est-à-dire tous les objets catalogués à un instant, qu'ils soient suivis ou perdus par la suite) avoisine les 72% en 6 jours. Environ 15% des objets sont alors suivis puis perdus en 6 jours. Pour  $\sigma_\rho = 10$  Km, seulement 3% des objets simulés sont suivis puis perdus en 6 jours. Nous en déduisons que la forte dégradation des performances dans le cas où  $\sigma_\rho = 50$  Km serait à attribuer à un manque de robustesse des fonctions de suivi et non à un manque de robustesse des fonctions d'initialisation.

En revanche, la combinatoire semble fortement impactée par une dégradation de la précision de mesure en distance au-delà de  $\sigma_\rho = 10$  Km.

### 8.2.7 Conclusion des tests de performance

L'évaluation de la robustesse de l'algorithme de catalogage proposé permet de constater les points suivants :

- Les performances en couverture finale de l'algorithme d'initialisation ne semblent pas être impactées de manière significative par une dégradation de  $P_D$  ou de  $\sigma_\rho$  (nous attribuons la dégradation de performances à un manque de robustesse de la fonction de suivi dans le cas  $\sigma_\rho = 50$  Km).
- La réactivité, en revanche, est relativement sensible à la dégradation de  $P_D$ ,
- Les performances en complexité combinatoire semblent modérément impactées par une dégradation de  $P_D$  et fortement impactées par une dégradation de  $\sigma_\rho$  au-delà d'un certain seuil.

Dans cette thèse, nous considérons un radar monostatique à émission pulsée (fournit une mesure de distance). Cette analyse montre que l'algorithme proposé pourrait également être utilisé avec un système radar bistatique à émission continue sans mesure de distance (*cf.* Chapitre 2) : en effet, le bistatisme d'un tel radar permet de calculer une intersection entre le champ de veille et la ligne de visée du récepteur. Dans le cas d'un champ de veille étroit, cette intersection définit un segment de taille relativement étroite en fonction de la géométrie du triangle bistatique et du champ de veille. Une valeur de  $\sigma_\rho$  de 10 Km (les performances sont faiblement dégradées pour cette valeur en termes d'initialisation et de suivi), définit une loi gaussienne dont le support (centré) à 0,997 est un segment de 60 Km, qui pourrait être de l'ordre de l'intersection mentionnée. Cela appuie la pertinence de l'algorithme de catalogage proposé pour une utilisation avec un radar bistatique à émission continue et à champ de veille réduit.

## 8.3 Conclusion du chapitre

La méthode d'initialisation de pistes proposée aux Chapitre 6 et Chapitre 7 est mise en œuvre dans un contexte multicible grâce à un Track-Oriented Multiple Hypothesis Tracker (TO-MHT) que nous adaptons aux particularités du problème de catalogage par observations isolées (par des ajustements de l'algorithme classique justifiés par l'analyse de résultats intermédiaires ou par d'autres constats).

Les performances obtenues pour des scénarios de plusieurs centaines d'objets permettent de valider l'efficacité de l'algorithme d'initialisation proposé et appuient la faisabilité du système de catalogage proposé en évaluant notamment :

- un taux de couverture de l'ordre de 80-85% au moins pour les scénarios simulés,
- une complexité combinatoire gardée sous contrôle,
- une réactivité de l'ordre de quelques jours pour cataloguer plus de 80% des objets présents,
- une robustesse aux dégradations des performances de détection ( $P_D$ ) et de précision de mesure de distance ( $\sigma_\rho$ ).

Nous montrons entre autres que la complexité combinatoire est gardée sous contrôle, mais nous ne sommes pas capables à ce stade de l'appréhender pour des densités de détections plus réalistes. Au chapitre suivant, un modèle de complexité combinatoire permettant d'extrapoler les résultats obtenus est proposé.



# Chapitre 9

## Modélisation de la complexité combinatoire

Nous présentons dans cette section une méthode permettant d'évaluer la complexité combinatoire en fonction de la densité de détections et de paramètres caractérisant la méthode de catalogage utilisée. La méthode de catalogage est évaluée sur des jeux de données simulés contenant peu d'objets (quelques centaines) par comparaison à une situation réelle où plusieurs dizaines de milliers, voire plusieurs centaines de milliers d'objets seraient présents. Aux densités d'observations testées, le catalogage montre de bonnes performances en termes de couverture mais la complexité combinatoire est difficile à évaluer. Nous mesurons en effet le nombre de nœuds gardés en mémoire au cours du catalogage et l'allure de la courbe présentée en Figure 8.9 est une bonne indicatrice sans pour autant pouvoir garantir un coût de calcul suffisamment faible à des densités de détection plus élevées.

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Analyse combinatoire . . . . .</b>	<b>136</b>
9.1.1	Modélisation paramétrique de la complexité combinatoire	136
9.1.2	Modélisation paramétrique du nombre instantané de nouvelles pistes $\mathbf{m}(\mathbf{k})$ . . . . .	138
<b>9.2</b>	<b>Calibration du modèle . . . . .</b>	<b>139</b>
9.2.1	Détermination des paramètres liés à la performance du catalogage $\alpha$ , $\lambda$ et $\kappa$ . . . . .	139
9.2.2	Détermination des paramètres liés au temps $\mathbf{I}_{1,\min}$ , $\mathbf{I}_{1,\max}$ , $\mathbf{I}_{2,\min}$ , $\mathbf{I}_{2,\max}$ , $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ . . . . .	140
9.2.3	Détermination du coefficient de précision $\mathbf{a}_{1,2}$ . . . . .	141
<b>9.3</b>	<b>Extrapolations . . . . .</b>	<b>142</b>
9.3.1	Discussion sur la validité des prédictions . . . . .	143
<b>9.4</b>	<b>Systèmes à plusieurs capteurs . . . . .</b>	<b>144</b>
9.4.1	Système de deux capteurs opposés en longitude . . . . .	145
9.4.2	Système de deux capteurs de même longitude . . . . .	145
9.4.3	Analyse et comparaison de performances . . . . .	146
<b>9.5</b>	<b>Conclusion du chapitre . . . . .</b>	<b>147</b>

---



## 9.1 Analyse combinatoire

Le modèle de complexité combinatoire proposé cherche à évaluer le nombre d'algorithmes de Gauss-Newton effectués, c'est-à-dire le nombre de triplets d'observations  $N_{GN}^C$  formés instantanément au cours du catalogage.

L'exécution d'un algorithme de Gauss-Newton lors d'une initialisation de piste est en effet l'élément déterminant la complexité combinatoire car l'estimation d'orbite circulaire et l'estimation d'orbite définitive (par l'algorithme de Gauss-Newton) ont un coût de calcul important lors de l'initialisation. Cependant, l'estimation d'orbite circulaire est effectuée sur chaque paire d'observations disponible (complexité en  $\mathcal{O}(n^2)$ ) tandis que l'estimation d'orbite définitive se fait à partir de triplets issus des combinaisons possibles de paires et de troisièmes observations (complexité en  $\mathcal{O}(n^3)$ ). Pour les densités d'observations élevées, l'algorithme de Gauss-Newton est donc exécuté un plus grand nombre de fois.

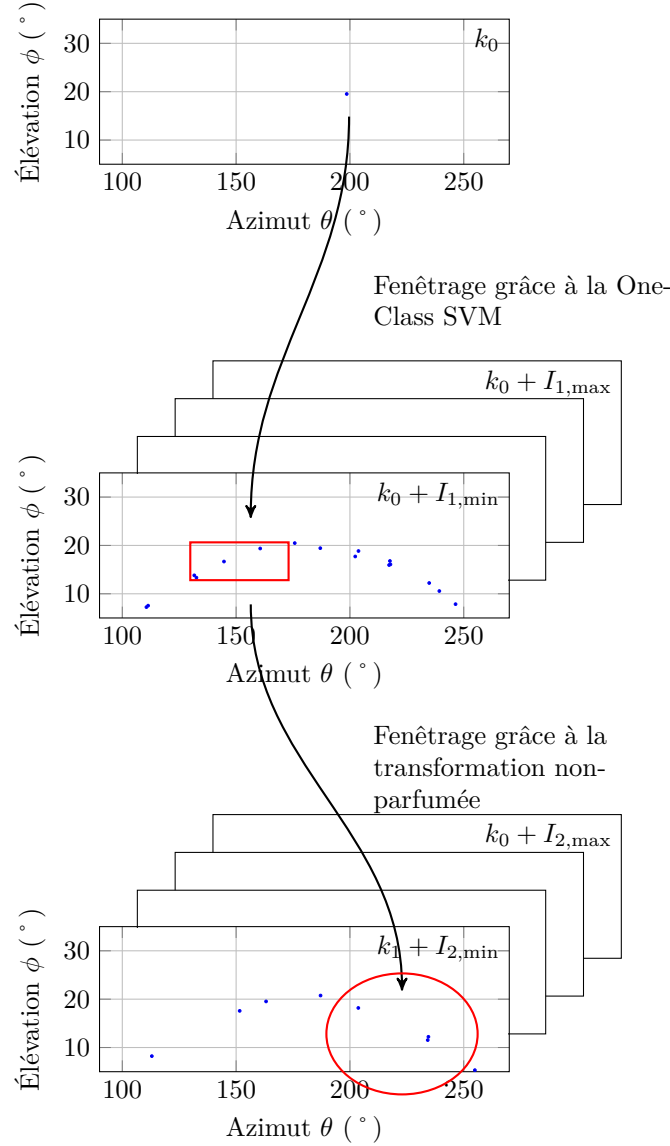
De plus, cet algorithme implique une boucle itérative nécessitant le calcul de matrices jacobiniennes, d'inversions de matrices et de produits matriciels. Le calcul le plus coûteux est la propagation d'orbite SGP (fonction  $f_{SGP}$ ), qui intervient dans le calcul des jacobiniennes et dans le calcul des résidus. Dans l'algorithme de Gauss-Newton implémenté dans le cadre de cette thèse, nous pouvons compter jusqu'à 500 évaluations de la fonction  $f_{SGP}$  dans le cas le plus défavorable, contre 15 évaluations pour une transformation non-parfumée.

L'algorithme de Gauss-Newton est également utilisé dans la mise à jour de pistes constituées de plus de trois observations, mais le nombre d'utilisations sur de telles pistes est linéaire vis-à-vis nombre d'objets présents. Il est donc inutile d'en tenir compte dans notre modèle, qui permet alors d'évaluer la complexité combinatoire lorsqu'elle est la plus critique, c'est-à-dire lors de l'initialisation.

### 9.1.1 Modélisation paramétrique de la complexité combinatoire

Dans cette étude, les différentes méthodes d'association utilisées pour le catalogage sont équivalentes à un fenêtrage : à partir d'une piste, une fenêtre de validation est calculée pour permettre la corrélation de nouvelles observations. Les fenêtres ont une dimension temporelle, c'est-à-dire qu'elles n'existent que sur un intervalle de temps limité comme l'indique la Figure 9.1.

Nous pouvons alors calculer la distribution  $b_1$  des intervalles de temps entre la première et la seconde observation d'une piste et la distribution  $b_2$  des intervalles de temps entre la seconde observation d'une paire et une troisième observation valide. Ces distributions ont pour supports les intervalles  $[I_{1,\min}, I_{1,\max}]$  et  $[I_{2,\min}, I_{2,\max}]$ , respectivement.



**Figure 9.1** – Des observations entre les scans  $k_0 + I_{1,\min}$  et  $k_0 + I_{1,\max}$  sont associées à une observation initiale issue du scan  $k_0$ . Des observations entre les scans  $k_1 + I_{1,\min}$  et  $k_1 + I_{1,\max}$  sont associées à partir d’une paire d’observations dont la seconde observation est issue du scan  $k_1 \in [k_0 + I_{1,\min}, k_0 + I_{1,\max}]$ .

Les fenêtres de validation sont caractérisées par leur volume spatio-temporel et ne dépendent donc pas de la densité de détection. Nous notons respectivement  $a_1$  et  $a_2$  les moyennes du rapport du volume d’une fenêtre  $V_F$  sur le volume surveillé  $V$  pour la première et la deuxième association :

$$a = \mathbb{E} \left[ \frac{V_F}{V} \right] \quad (9.1)$$

où  $a$  désigne  $a_1$  ou  $a_2$  et  $V_F$  se rapporte à la méthode de première association ou à la méthode de deuxième association.

Ces coefficients évaluent la précision du fenêtrage. En effet, si l’on note  $m(k)$  le

nombre d'observations présentes au scan  $k$ , alors le nombre moyen de corrélations au scan  $k$  (si la fenêtre de validation y existe) est égal à  $a \times m(k)$ .

Afin d'évaluer le nombre  $N$  d'observations corrélées à une piste existante (en cours d'initialisation) grâce à une fenêtre, nous intégrons la quantité  $a \times m(k)$  selon la distribution des temps de corrélation  $b$  :

$$N = a \times \sum_{k=I_{\min}}^{I_{\max}} b(k)m(k) \quad (9.2)$$

où  $b$  correspond à la pondération rendant compte de la distribution temporelle moyenne des corrélations et  $I_{\min}$  et  $I_{\max}$  désignent respectivement  $I_{1,\min}$  ou  $I_{2,\min}$  et  $I_{1,\max}$  ou  $I_{2,\max}$ .

Le nombre de triplets d'observations futurs  $N_{\text{GN}}^{\text{F}}(k_0)$  engendrés par les  $m(k_0)$  observations du scan  $k_0$  peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} N_{\text{GN}}^{\text{F}}(k_0) = m(k_0) \times a_1 \sum_{k_1=I_{1,\min}}^{I_{1,\max}} & \left( b_1(k_1)m(k_0 + k_1) \right. \\ & \left. \times a_2 \sum_{k_2=I_{2,\min}}^{I_{2,\max}} b_2(k_2)m(k_0 + k_1 + k_2) \right) \end{aligned} \quad (9.3)$$

Nous cherchons à évaluer le nombre de triplets d'observations  $N_{\text{GN}}^{\text{C}}(k_n)$  à l'instant  $k_n$ , qui s'obtient en remplaçant  $k_0$  par  $k_n - k_1 - k_2$  après avoir distribué les termes dépendant de  $k_0$  dans la somme la plus imbriquée :

$$\begin{aligned} N_{\text{GN}}^{\text{C}}(k_n) = a_{1,2} m(k_n) \times \sum_{k_2=I_{2,\min}}^{I_{2,\max}} & \left( b_2(k_2)m(k_n - k_2) \right. \\ & \left. \times \sum_{k_1=I_{1,\min}}^{I_{1,\max}} b_1(k_1)m(k_n - k_1 - k_2) \right) \end{aligned} \quad (9.4)$$

avec  $a_{1,2} = a_1 a_2$ .

### 9.1.2 Modélisation paramétrique du nombre instantané de nouvelles pistes $m(\mathbf{k})$

Lors de l'implémentation de l'algorithme de pistage multicible TO-MHT, nous faisons le choix de ne pas initialiser de nouvelle piste à partir d'une nouvelle observation prolongeant une piste confirmée. Par conséquent, la densité de nouvelles observations disponibles  $m(k)$  varie en fonction du nombre d'objets catalogués à un instant  $k$ .

Dans cette étude, nous modélisons le nombre moyen de nouvelles observations disponibles  $m(k)$  en fonction des performances obtenues en simulation et des nombres moyens d'observations associées aux objets réels ( $m_{\text{obj.}}$ ) et aux fausses alarmes ( $m_{\text{FA}}$ ) :

$$m(k) = m_{\text{FA}} + g(k) m_{\text{obj.}} \quad (9.5)$$

où  $g(k)$  est la proportion d'observations correspondant à un objet réel non-suivi.

Si l'on suppose que l'on initialise les pistes d'une proportion constante des objets non-catalogués  $N_{\text{NC}}(k)$  à chaque instant, c'est-à-dire que  $N_{\text{NC}}(k+1) - N_{\text{NC}}(k) = \lambda N_{\text{NC}}(k)$  avec  $N_{\text{NC}}(k)$  le nombre instantané d'objets non-catalogués au scan  $k$  et  $\lambda$  une constante de décroissance, la fonction  $g(k)$  peut se modéliser de manière simple par une décroissance exponentielle. Les résultats obtenus en Figure 8.8 permettent d'identifier la fonction  $g(k)$  telle que :

$$g(k) = \alpha \left[ 1 - e^{-\lambda(k-\kappa)} H(k - \kappa) \right] \quad (9.6)$$

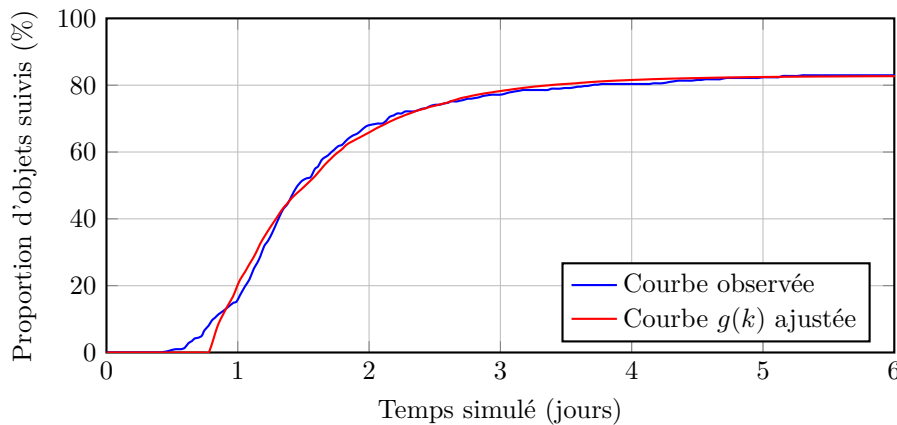
où  $\alpha$  est le taux d'objets catalogués à la fin de la simulation,  $\lambda$  est la constante de décroissance,  $\kappa$  est le délai avant que les premiers objets soient catalogués et  $H$  est la fonction d'échelon unitaire.

## 9.2 Calibration du modèle

Les paramètres du modèles sont déterminés grâce à des données issues de la simulation d'échantillons de 500 à 800 objets.

### 9.2.1 Détermination des paramètres liés à la performance du catalogue $\alpha$ , $\lambda$ et $\kappa$

L'algorithme décrit au Chapitre 8 est utilisé sur les données simulées à partir du catalogue. Cela nous permet de déterminer les valeurs de  $\alpha$ ,  $\lambda$  et  $\kappa$  en ajustant  $g(k)$  aux courbes de la Figure 8.8.



**Figure 9.2** – Exemple d'ajustement de  $g(k)$  pour les points de la courbe observée correspondant au catalogue de 500 objets.

Nous obtenons les valeurs suivantes :

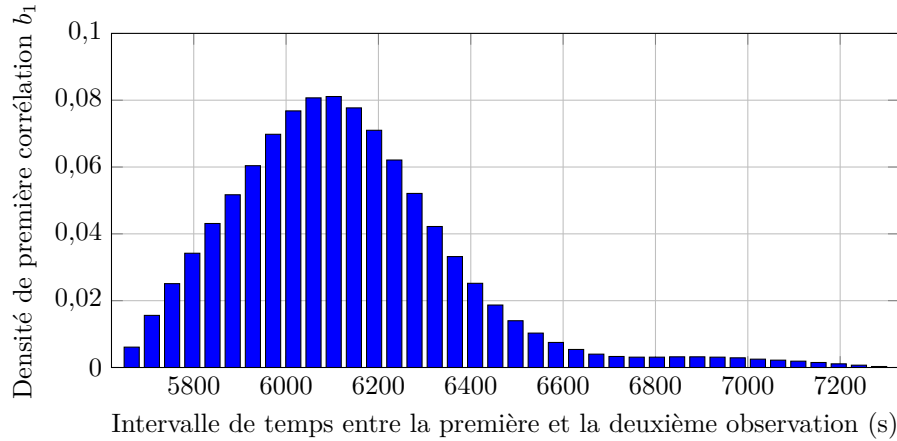
	$\alpha$ (%)	$\lambda$ (j <sup>-1</sup> )	$\kappa$ (j)
500 objets	81,85	1,39	0,83
600 objets	80,50	1,21	0,83
700 objets	82,11	1,28	0,87
800 objets	82,50	1,30	0,88

**Tableau 9.1** – Valeurs de  $\alpha$ ,  $\lambda$  et  $\kappa$  obtenues pour des scénarios de 500, 600, 700 et 800 objets.

Les valeurs de paramètres obtenues pour les courbes associées aux scénarios de 500, 600, 700 et 800 objets sont très proches. Pour ces scénarios, les paramètres du modèle sont donc indépendants du nombre d'objets présents (et donc de la densité de détection associée à la présence d'objets). Nous supposons dans cette section que cela est vrai également pour un nombre quelconque d'objets, bien qu'il faudrait le confirmer pour une plus large plage de densités de détection.

### 9.2.2 Détermination des paramètres liés au temps $I_{1,\min}$ , $I_{1,\max}$ , $I_{2,\min}$ , $I_{2,\max}$ , $b_1$ et $b_2$

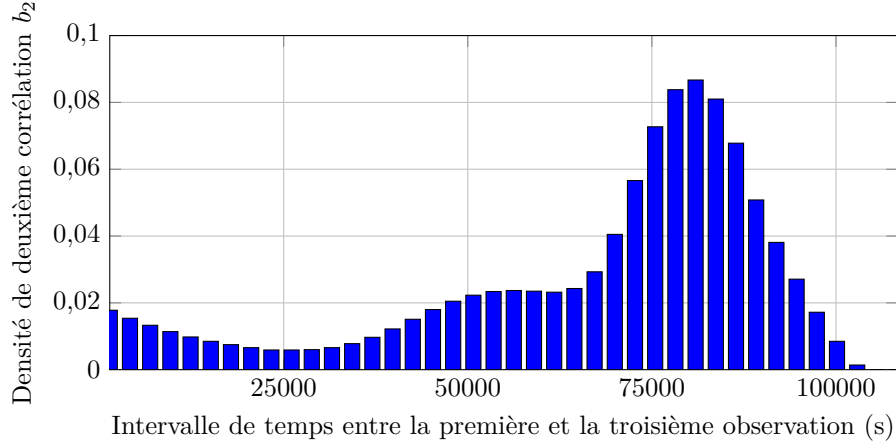
Les paramètres sont déterminés à partir de l'application de la méthode d'initialisation de piste sur les observations simulées des objets du catalogue Space-Track sur une durée de 3 jours). Nous pouvons alors observer des valeurs de  $I_{1,\min}$ ,  $I_{1,\max}$ ,  $I_{2,\min}$ ,  $I_{2,\max}$ ,  $b_1$  et  $b_2$  grâce aux courbes suivantes :



**Figure 9.3** – Densité de première corrélation  $b_1$  en fonction de l'intervalle de temps entre la première observation et la deuxième observation d'une piste.

Nous relevons les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 I_{1,\min} & \text{ (borne inférieure de } b_1) &= 5\,620 \text{ s} \\
 I_{1,\max} & \text{ (borne supérieure de } b_1) &= 7\,330 \text{ s}
 \end{aligned}$$



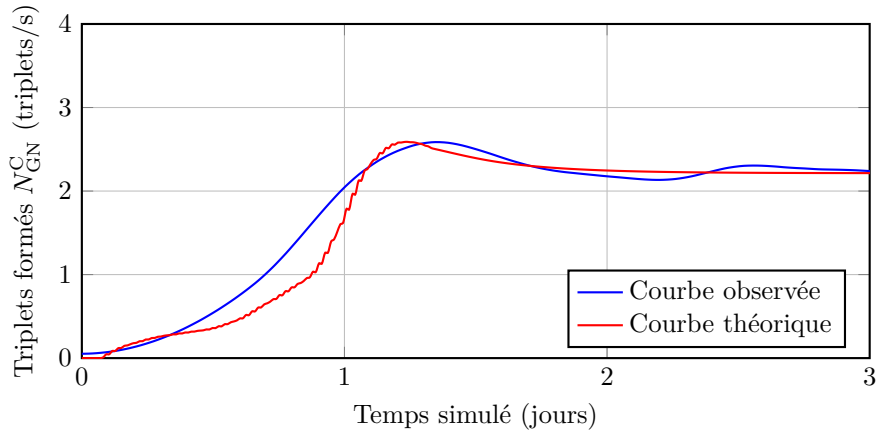
**Figure 9.4** – Densité de deuxième corrélation  $b_2$  en fonction de l'intervalle de temps entre la première observation et la troisième observation d'une piste.

Nous relevons les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} I_{2,\min} \quad (\text{borne inférieure de } b_2) &= 1\,380 \text{ s} \\ I_{2,\max} \quad (\text{borne supérieure de } b_2) &= 108\,370 \text{ s} \end{aligned}$$

### 9.2.3 Détermination du coefficient de précision $a_{1,2}$

Le coefficient de précision  $a_{1,2}$  peut être estimé en recalant une courbe théorique sur une courbe expérimentale de  $N_{\text{GN}}^{\text{C}}(k)$  (le nombre moyen instantané de triplets d'observations formés), pour un jeu d'observations issues de la simulation de 500 objets et en utilisant les paramètres  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $I_{1,\min}$ ,  $I_{1,\max}$ ,  $I_{2,\min}$ ,  $I_{2,\max}$ ,  $b_1$  et  $b_2$  définis en amont.



**Figure 9.5** – Courbe théorique et courbe observée associées à  $N_{\text{GN}}^{\text{C}}(k)$  sur 3 jours (phase d'initialisation). Le coefficient  $a_{1,2}$  est ajusté.

La courbe prédite (équation (9.4)) et la courbe observée ont le même gabarit : le

palier est d'amplitude égale (cela est le résultat direct de l'ajustement de  $a_{1,2}$ ) et elle atteignent la même valeur maximale à des instants proches.

Nous obtenons les valeurs suivantes :

	$a_{1,2}$
500 objets	$3,47.10^{-2}$
600 objets	$3,41.10^{-2}$
700 objets	$3,46.10^{-2}$
800 objets	$3,54.10^{-2}$

**Tableau 9.2** – Valeurs de  $a_{1,2}$  obtenues pour des scénarios de 500, 600, 700 et 800 objets.

Ces valeurs sont très proches et permettent de supposer que  $a_{1,2}$  ne dépend pas de  $m$  aux ordres de grandeurs considérés.

Le modèle ainsi défini dans cette section permet d'estimer le nombre de triplets d'observations générés à chaque instant à partir d'observations passées et présentes, pour des densités de détection associées à la présence de 500 à 800 objets en orbite et de fausses alarmes.

## 9.3 Extrapolations

Nous posons l'hypothèse que ce modèle et ce paramétrage restent valides pour des densités de détection plus importantes.

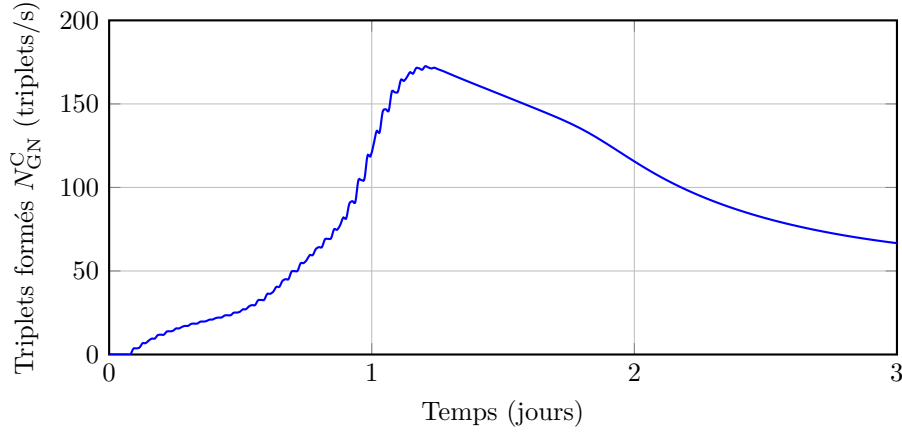
Nous utilisons le modèle pour prédire la complexité générée par le catalogage des objets en orbite basse du catalogue Space-Track complet (plus de 11 000 objets), puis des 100 000 ou 500 000 objets de plus de 1 cm de diamètre attendus, avec un taux de fausses alarmes de 1 FA/s, soit  $m_{FA} = 10$  FA/scan.

	$m_{FA}$ (FA/Scan)	$m_{obj.}$ (obs./Scan)	$N_{GN}^C$ max. (GN/s)	$N_{GN}^C$ palier (GN/s)
11 799 objets	10	8,06	173	56
100 000 objets	10	69,31	11 967	523
500 000 objets	10	341,55	1 041 097	20 243

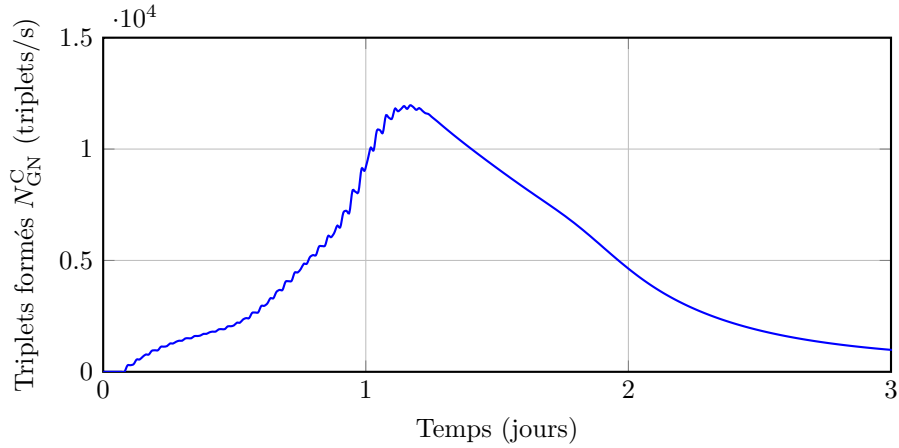
**Tableau 9.3** – Valeurs caractérisant les complexités combinatoires instantanées  $N_{GN}^C(k)$  pour les prédictions de 11 799, 100 000 et 500 000 objets.

Nous distinguons plus nettement sur les courbes des Figure 9.6, Figure 9.7 et Figure 9.8 les deux sources de complexité combinatoire :

- La densité d'observations issues d'objets présents ou simulés  $m_{obj.}$  entraîne un pic de coût de calcul entre 24 et 30 heures après le début du catalogage. Ce pic est le résultat de l'augmentation du nombre de triplets (hypothèses d'association) avant qu'ils soient éliminés au fur et à mesure que les objets sont catalogués. En effet,



**Figure 9.6** – Prédiction de la complexité combinatoire instantanée  $N_{GN}^C(k)$  résultant du catalogage de 11 799 objets en orbite basse ( $m_{FA} = 10$  FA/Scan,  $m_{obj.} = 8,06$  observations/Scan).



**Figure 9.7** – Prédiction de la complexité combinatoire instantanée  $N_{GN}^C(k)$  résultant du catalogage de 100 000 objets en orbite basse ( $m_{FA} = 10$  FA/Scan,  $m_{obj.} = 68,31$  observations/Scan).

les pistes confirmées associées aux objets catalogués permettent alors d'associer de nouvelles observations sans qu'une nouvelle piste soit initialisée.

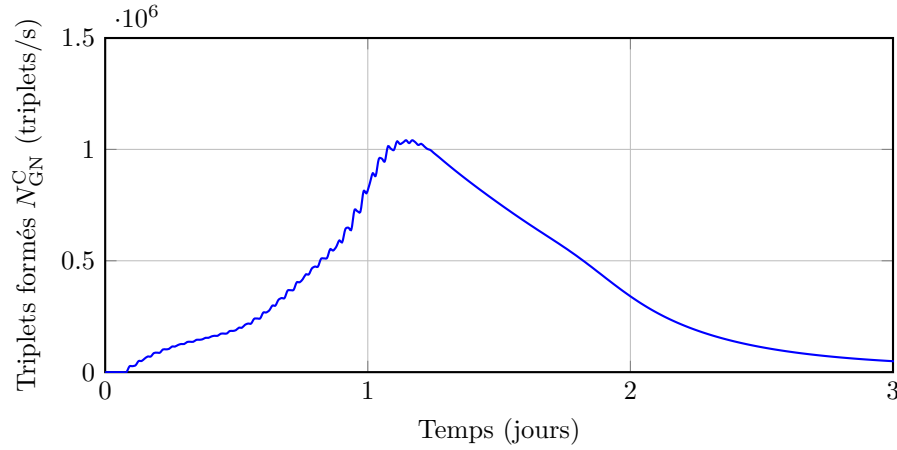
- La densité d'observations issues de fausses alarmes  $m_{FA}$  entraîne un palier vers lequel le nombre de triplets formés instantané semble converger au-delà de 3 jours. En effet, les objets non-catalogués sont en minorité et de nouvelles pistes sont initialisées à partir de fausses alarmes.

### 9.3.1 Discussion sur la validité des prédictions

La précision des complexités combinatoires prédites dans cette section ne sont pas évaluées. Nous devons par conséquent garder à l'esprit les considérations suivantes :

- Nous faisons l'hypothèse que les performances de catalogage ( $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $a_{1,2}$ ) sont constantes pour toute densité de détection  $m(k)$ . Or en pratique, il est vraisemblable qu'une densité de détection maximale au-delà de laquelle ces performances





**Figure 9.8** – Prédiction de la complexité combinatoire instantanée résultant du catalogage de 500 000 objets en orbite basse ( $m_{FA} = 10$  FA/Scan,  $m_{obj.} = 341,55$  observations/Scan).

se dégradent fortement existe, bien que nous ne sachions pas déterminer théoriquement sa valeur.

- D’autres phénomènes impactant la complexité combinatoire peuvent exister mais ne pas être observables aux densités de détections utilisées pour le paramétrage du modèle,
  - Les hypothèses limitatives (excentricités des orbites faibles, altitudes bornées) que nous adoptons peuvent également avoir un impact sur la complexité combinatoire.
- Par conséquent, les prédictions effectuées peuvent se révéler imprécises et le risque qu’elles le soient augmente quand la valeur de  $m_{obj.}$  utilisée pour la prédiction s’éloigne des valeurs utilisées pour la calibration (valeurs de  $m_{obj.}$  associées aux scénarios simulés de 500, 600, 700 et 800 objets).

Ces prédictions sont cependant informatives quant à l’intérêt de la méthode de pistage proposée en fournissant un ordre de grandeur de la complexité combinatoire de l’étape la plus coûteuse en temps de calcul.

## 9.4 Systèmes à plusieurs capteurs

Les hypothèses faites dans cette étude permettent de supposer que le coût de réalisation du capteur physique est limité. De ce fait, un système à plusieurs capteurs pourrait être une option envisageable dans le but d’améliorer le critère de couverture, de complexité combinatoire ou encore de réactivité. Par exemple, le Space Surveillance Network (SSN) américain intègre plusieurs capteurs et le nouveau capteur de surveillance américain à l’étude prévoit deux ou trois sites répartis à la surface du globe.

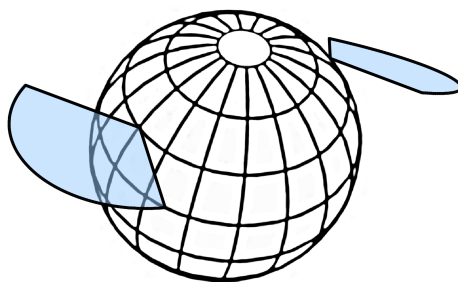
Nous disposons à ce stade des outils permettant une évaluation préliminaire de l’apport d’un second capteur identique au premier. Pour cela, nous évaluons les deux critères de performance que nous considérons essentiels pour le catalogage, à savoir la couverture et la complexité combinatoire, avec des observations simulées

issues de deux systèmes de deux capteurs identiques en entrée de l'algorithme.

L'optimisation du positionnement des deux capteurs est une question difficile qui peut faire l'objet de nombreux travaux. Dans le cadre de ces travaux, nous étudions uniquement les performances de catalogage de deux systèmes dont les deux capteurs sont positionnés sur des longitudes opposées ou sur une même longitude.

### 9.4.1 Système de deux capteurs opposés en longitude

L'étude concernant les intervalles de temps entre paires d'observations initiales et troisièmes observations montre qu'un grand nombre de troisièmes observations candidates correspondent à une ascendance opposée à celle de la paire d'observations initiale (*cf.* Figure 7.7). Nous pouvons alors en déduire que situer un second capteur sur une longitude opposée au premier (*cf.* Figure 9.9) permettrait de réduire le temps nécessaire à l'observation d'une troisième observation correcte et ainsi accélérer la suppression des fausses pistes. Pour le second capteur, nous choisissons une latitude identique à celle du premier capteur. Cela permet de générer des paires d'observations grâce aux mêmes données que celles extraites grâce à la SVM (*cf.* Chapitre 6).

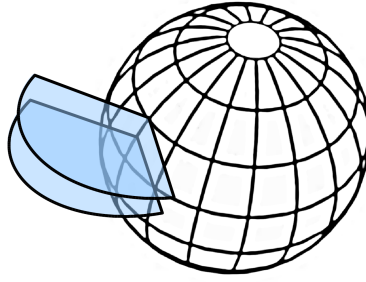


**Figure 9.9** – Schéma représentant les champs de veille de deux capteurs identiques positionnés à des longitudes opposées.

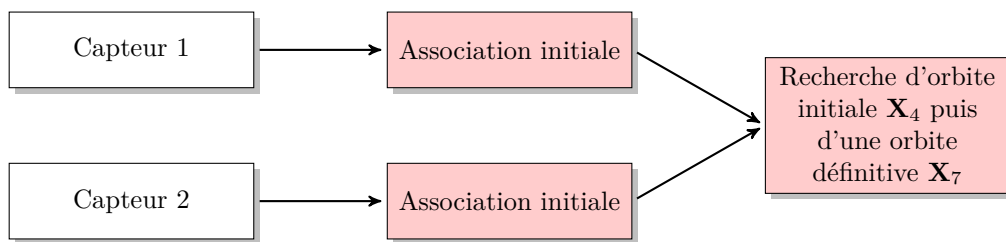
### 9.4.2 Système de deux capteurs de même longitude

L'observabilité de l'orbite associée à un objet dépend en particulier des positions relatives (dans le temps et dans l'espace) des observations disponibles dans un référentiel ECI. Situer un second capteur sur une même longitude à une latitude proche permettrait d'associer rapidement une troisième observation associée à une portion d'orbite différente pour améliorer l'observabilité de l'orbite, tout en ayant les trois observations plus espacées spatialement dans un référentiel ECI. Nous choisissons de ne pas générer de paires d'observations à partir du second capteur afin de mieux évaluer son apport. La Figure 9.10 schématise cette configuration.

L'initialisation de pistes est effectuée de manière indépendante avec chaque capteur comme l'indique la Figure 9.11, la corrélation d'une observation initiale avec une observation issue d'un autre capteur constituant un sujet d'étude en soi.



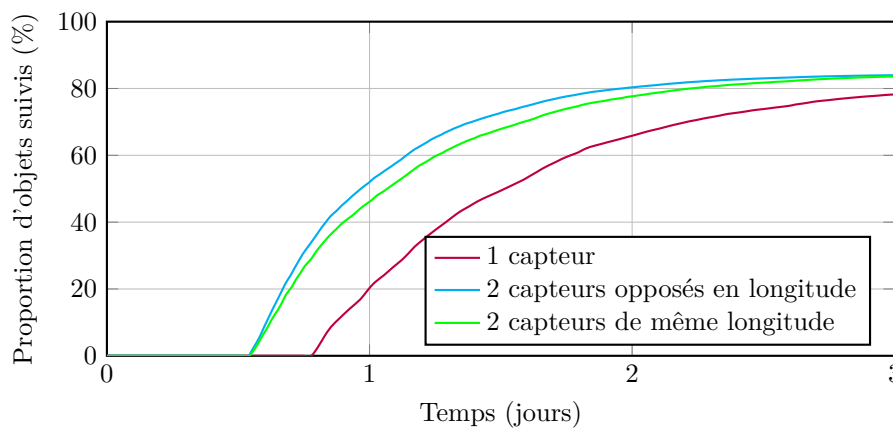
**Figure 9.10** – Schéma représentant les champs de veille de deux capteurs identiques positionnés à une même longitude.



**Figure 9.11** – L'initialisation est faite de manière indépendante sur les observations de chaque capteur. Les pistes interfèrent lorsqu'elles disposent d'une orbite circulaire  $\mathbf{X}_4$ .

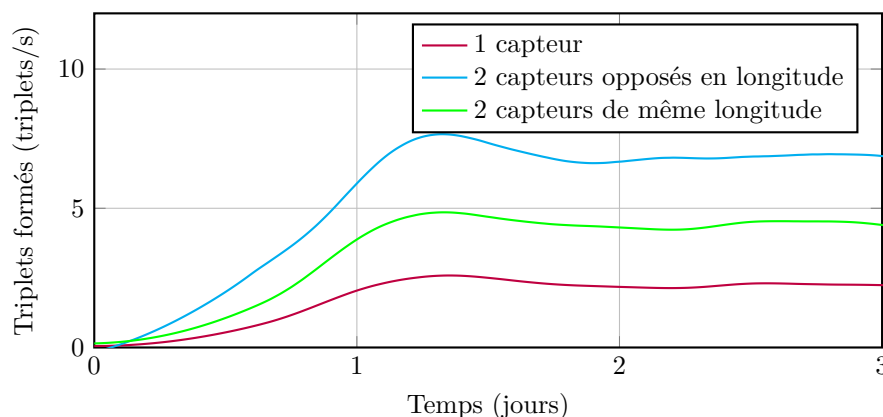
### 9.4.3 Analyse et comparaison de performances

Nous évaluons et comparons les critères de performance essentiels, à savoir la proportion d'objets suivis et le nombre instantané de triplets formés au cours du temps, pour un scénario de 500 objets simulés avec l'ajout de fausses alarmes.



**Figure 9.12** – Évolution temporelle de la proportion d'objets suivis pour un système à un capteur et pour deux systèmes à deux capteurs.

La Figure 9.12 montre que la réactivité est améliorée de manière significative grâce à la présence d'un second capteur : la phase d'initialisation pour les systèmes à deux capteurs est réduite de moitié (le seuil de 80% est atteint en 2 jours contre 4 pour le système à un capteur).



**Figure 9.13** – Évolution temporelle du nombre instantané de triplets formés pour un système à un capteur et pour deux systèmes à deux capteurs.

La Figure 9.13 montre en revanche que la complexité combinatoire est plus forte pour les systèmes à deux capteurs. Un second capteur implique en effet un plus grand nombre d’observations à combiner par unité de temps, ce qui implique une complexité supplémentaire qui n’est pas compensée par l’accélération espérée de la suppression de pistes incorrectes. Nous remarquons également que la complexité combinatoire associée au système de deux capteurs opposés en longitude est significativement plus élevée que celle associée au système dont les deux capteurs sont situés sur une même longitude. Cela pourrait être dû à une durée de vie des fausses pistes beaucoup plus courte dans le second cas, car la troisième association se ferait plus tôt pour les pistes correctes.

Nous pouvons déduire de cette courte analyse que la réactivité peut être augmentée de manière significative grâce à un second capteur au détriment de la complexité combinatoire.

## 9.5 Conclusion du chapitre

Nous avons étendu la méthode d’initialisation de pistes proposée au Chapitre 6 dans un contexte multicapteurs. La complexité combinatoire intrinsèque au système (capteur(s) physique(s) et méthode de catalogage) a été extrapolée à des densités de détection plus élevées que celles disponibles en simulation grâce à un modèle simple permettant de prédire le nombre instantané de triplets d’observations formés (et donc d’exécutions de l’algorithme de Gauss-Newton liées à l’initialisation de piste et à la découverte d’objets). Grâce à ces prédictions, nous pouvons anticiper dans une certaine mesure que la méthode proposée constitue une solution efficace au problème de combinatoire rencontré dans le catalogage par moyens d’observations isolées.

La réflexion menée dans ce chapitre permet également de mettre en évidence le compromis entre complexité combinatoire et réactivité : en effet, réduire le nombre total d’observations disponibles par la réduction du champ de veille d’un capteur seul ou d’un ensemble de capteurs permet de réduire de manière importante le

nombre de pistes possibles formées par la méthode proposée, au détriment de la réactivité. Par exemple, l'utilisation de deux capteurs implique une augmentation de la complexité mais un gain significatif en réactivité en réduisant le temps nécessaire à l'accumulation d'observations permettant de rendre une orbite observable.

# Conclusions et perspectives

Les travaux menés dans cette thèse portent sur le catalogage de petits débris spatiaux en orbite basse par moyens d’observations isolées. L’étude d’une telle problématique nécessite la compréhension de certains éléments de contexte, comme par exemple les missions affectées à certains capteurs existants (Chapitre 1) ou leurs types et leurs complexités (Chapitre 2), afin d’identifier d’une part une configuration de capteur offrant un bon compromis entre puissance émise et taille des objets détectés (un capteur de complexité accessible), et d’autre part des critères de performances pour évaluer les algorithmes mis en œuvre (couverture, puissance de calcul requise, réactivité, *etc.*).

Des méthodes de traitement de l’information classiques telles que les méthodes de pistage et de détermination d’orbite sont confrontées aux données simulées issues du capteur dont certains paramètres dimensionnants sont choisis au Chapitre 2. Cela permet de dégager une problématique précise, qui met en évidence le manque de techniques d’association initiale d’observations isolées.

Au Chapitre 6, nous proposons une méthode d’association d’observations à une révolution d’intervalle exploitant le fait que les objets ne sont observés que sur certaines portions des ellipses définies par leurs orbites. Cela est un levier central permettant de jouer sur le point de compromis entre complexité et réactivité : en identifiant un “motif” particulier de paire d’observations pour initialiser les pistes, nous ignorons un grand nombre de combinaisons d’observations possibles (perte de réactivité) au profit d’une ambiguïté beaucoup plus favorable (diminution de la complexité combinatoire) avec un taux de rappel plus qu’acceptable. Cette méthode est complétée par un calcul d’orbite circulaire approximative permettant de traiter au mieux les paires d’observations résultantes et d’initialiser des pistes de manière efficace.

La méthode d’initialisation proposée et évaluée au Chapitre 6 est intégrée dans un algorithme de pistage multicible (le TO-MHT) que nous adaptons aux particularités du problème. Les performances de l’algorithme obtenu sont évaluées notamment en termes de couverture et de réactivité, et l’évaluation de la complexité combinatoire résultante est conduite grâce à un modèle que nous proposons et paramétrons. Ces travaux, présentés au Chapitre 8, prouvent le bon fonctionnement et l’efficacité de l’algorithme de catalogage proposé pour traiter les observations radars issues d’un capteur à champ de veille restreint et ouvrent la voie à plusieurs axes de recherches brièvement discutés dans la suite de ce document.

## Contributions

### Une problématique peu connue

Cette thèse aborde une problématique scientifique peu connue : le pistage d’objets spatiaux non-coopératifs sous de fortes contraintes d’observation (observations isolées). En effet, de nombreuses études concernant l’estimation de position ou de trajectoire ont été menées en considérant des capteurs inertiels embarqués couvrant les besoins des opérateurs de satellites, ce qui n’implique aucun problème d’association. Dans les cas où l’objet est non-coopératif, les capteurs au sol surveillent une large zone de l’espace, ce qui facilite l’association d’observations sur le long terme. En définitive, le pistage d’objets spatiaux se réduit souvent à des techniques d’orbithographie à partir d’un jeu d’observations nécessairement issues de l’objet d’intérêt ou préalablement associées sur un court terme. Cette thèse fournit alors des éléments pour explorer la problématique de l’association d’observations isolées, les problématiques connexes (contraintes de capteur, dynamique orbitale) ainsi que des méthodes applicables.

### Une solution originale aux aspects variés

La démarche adoptée compartimente les différents aspects du catalogage en abordant les aspects “association” et “estimation” de l’initialisation sous un angle monocible, puis sous un angle multicible par l’implémentation d’un TO-MHT. La méthode de catalogage proposée emprunte et adapte des techniques existantes dans des domaines variés comme par exemple la classification (One-Class SVM), l’optimisation (Gauss-Newton), le pistage monocible (Transformation Non-Parfumée) et le pistage multicible (TO-MHT). Cela démontre que les techniques de traitement de l’information peuvent avoir un rôle central dans un domaine traditionnellement partagé entre les spécialistes de la mécanique orbitale et les radaristes.

De plus, l’algorithme est évalué à partir d’objets spatiaux réels (le catalogue Space-Track) dont les détections sont simulées dans des hypothèses de capteur physique envisageable et grâce à un modèle dynamique de précision adaptée. Les performances obtenues appuient la faisabilité d’un tel système pour le catalogage de petits objets en orbite basse.

### L’observabilité, un concept étudié en filigrane

Au coeur de ces travaux, nous abordons le concept de l’observabilité d’un état (ou observabilité de l’orbite). L’observabilité de l’orbite d’un objet est en effet au centre de nos préoccupations : nous cherchons tout au long de ces travaux à identifier la quantité d’information disponible minimale permettant la connaissance précise d’une orbite associée à un objet et à gérer la complexité combinatoire due à la non-observabilité d’une orbite lors d’une phase d’initialisation. Lors de la phase d’initialisation du pistage d’un objet, les méthodes proposées permettent d’exploiter au mieux l’information disponible à chaque instant pour en déduire un état partiel :

- 
- la méthode de première association permet d’exploiter une certaine observabilité issue de l’information portée individuellement par les deux observations isolées afin de réduire l’ambiguïté d’association,
  - la seconde association exploite une orbite (circulaire) approximative mais dont l’observabilité est forte et permet l’association d’une troisième observation,
  - enfin, l’algorithme de Gauss-Newton et le SPRT permettent d’atteindre une observabilité forte de l’orbite définitive.

## Une étude complète

Un modèle de complexité combinatoire pour les méthodes de type “fenêtrage” a été proposé afin de vérifier l’efficacité de la méthode de catalogage en termes de temps de calcul. Cela permet d’évaluer ce critère complémentaire au taux de couverture et à la réactivité. De plus, des tests de robustesse à la dégradation de la probabilité de détection  $P_D$  et de la précision de mesure en distance  $\sigma_\rho$  ont été menés afin d’apporter des éléments préliminaires à d’éventuels travaux futurs. Nous en déduisons par exemple l’existence d’une valeur de  $\sigma_\rho$  au-delà de laquelle la complexité combinatoire augmente fortement et les techniques de suivi doivent être robustifiées.

## Limites

### Une implémentation à optimiser

La principale difficulté rencontrée dans la problématique de l’association d’observations isolées est d’ordre combinatoire (puissance de calcul limitée). Par conséquent, une implémentation efficace permettrait d’évaluer les performances de l’algorithme de catalogage proposé pour des scénarios comprenant davantage d’objets simulés (nous simulons le catalogage de 800 objets sur 6 jours alors que la simulation du catalogage de plusieurs milliers d’objets serait souhaitable) afin de mieux le valider ou d’observer des phénomènes non-linéaires peu visibles à ces densités de détection. Un modèle dynamique plus précis ainsi qu’un modèle de capteur plus réaliste peuvent être envisagés pour la simulation de détections.

### Validation du modèle de complexité combinatoire

Le modèle de complexité combinatoire est validé grâce à seulement 4 points correspondant aux scénarios de 500, 600, 700 et 800 objets. Une estimation plus fiable des paramètres du modèle pourrait être obtenue avec davantage de données. Par ailleurs, l’exploitation de ce modèle pour prédire une complexité combinatoire instantanée suppose que les performances de l’algorithme ne se dégradent pas pour les densités de détection testées, ce que nous n’avons pu vérifier.



## Une méthode liée à une hypothèse de capteur

La méthode de catalogage proposée est issue d’une réflexion menée à partir de l’hypothèse d’un capteur radar monostatique à émission pulsée dont les paramètres sont fixés au Chapitre 2. La validité de la méthode pour d’autres types de systèmes reste alors à explorer. Par ailleurs, le paramétrage nécessaire au bon fonctionnement de la méthode est relativement difficile, en particulier le paramétrage de la première méthode d’association malgré l’utilisation d’une One-Class SVM qui réduit le nombre de paramètres.

## Perspectives

Les travaux menés dans cette thèse ouvrent la voie à plusieurs axes de recherche :

- Faire varier sur le nombre de capteurs, leurs positions, la géométrie et l’orientation de leurs champs de veille permet de faire varier un point de compromis entre réactivité et complexité combinatoire sous une contrainte de couverture.
- La corrélation entre une observation initiale et une observation issue d’un autre capteur est un sujet d’étude en soi et permettrait d’exploiter pleinement un système à deux capteurs pour réduire la complexité combinatoire.
- La méthode proposée est associée à un certain type de capteur (émission pulsée pour mesurer la distance). D’autres types de capteurs pourraient permettre l’utilisation de cette méthode avec des contraintes moins fortes (et donc un coût de conception ou de réalisation plus faible).
- Une modélisation plus poussée du coût de calcul nécessaire à la résolution d’un problème de catalogage difficile serait intéressante à des fins de conception.
- Enfin, l’étude des performances de la méthode et son adaptation pour cataloguer les objets dont les orbites sont moins représentées dans le catalogue Space-Track (par exemple les objets d’excentricité plus forte) et pour les objets manœuvrants permettrait d’envisager une extension du domaine d’application de la méthode.

## Extension à un système de capteurs

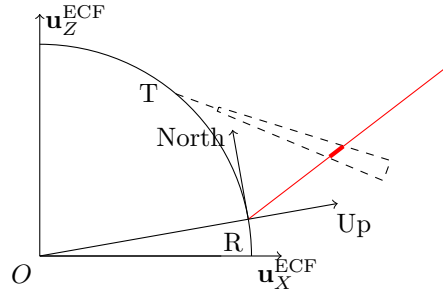
Nous illustrons en Section 9.4 le compromis entre réactivité et complexité combinatoire : davantage d’observations disponibles permettent de cataloguer de nouveaux objets plus rapidement au prix d’une complexité combinatoire plus élevée. Un système de plusieurs capteurs identiques (des capteurs différents impliqueraient autant de travaux de conception différents) peut par conséquent être avantageux mais implique une quantité beaucoup plus importante de paramétrages possibles notamment en termes de nombre de capteurs, de position, de géométrie et d’orientation des champs de veille. Le paramétrage d’un tel système peut être très complexe et nécessiter le recours à des méthodes d’optimisation permettant d’accéder à un certain nombre de points de compromis selon les performances recherchées.

De plus, la corrélation d’observations issues de capteurs différents lors de l’initialisation pourrait permettre de réduire de manière significative la complexité combina-

toire. Dans notre étude, nous ne traitons en effet que le cas des observations issues du même objet à une révolution d'intervalle, cette caractéristique conditionnant la méthode de corrélation ainsi que le traitement des paires résultantes en aval.

### Extension à un capteur de différente nature

Les tests de robustesse à la dégradation de la précision de mesure en distance  $\sigma_\rho$  présentés en Section 8.2.6 montrent des performances peu dégradées pour des incertitudes de 60 Km à  $3\sigma$ . Cela permet d'envisager le portage de la méthode de catalogage à d'autres types de capteurs disposant d'une mesure en distance mauvaise, voire inexistante. Par exemple, un radar bistatique à émission continue ne fournit aucune mesure de distance mais l'intersection entre la ligne de visée du récepteur et la zone de l'espace éclairée par l'émetteur pourrait permettre d'encadrer une distance associée à une observation (*cf.* Figure 9.14).



**Figure 9.14** – Exemple d'intersection entre le champs de veille et une ligne de visée associée à une observation dans le cas d'un radar bistatique. T désigne le transmetteur (ou émetteur) et R désigne le récepteur. La ligne rouge représente une ligne de visée sur laquelle les positions possibles de l'objet détecté sont indiquées par le segment en gras.

De plus, ce type de système peut fournir une mesure de vitesse radiale qui pourrait être utilisée dans la discrimination d'hypothèses d'association.

### Modélisation du temps de calcul

Nous proposons un modèle de complexité combinatoire pour la méthode de catalogage proposée et pour les méthodes d'association par fenêtrage de manière générale. Ce modèle permet d'estimer le nombre instantané de triplets d'observations formés. En associant à chaque triplet une quantité de calcul, nous pouvons évaluer la puissance calculatoire nécessaire au traitement en “temps réel” des triplets formés. Cette puissance calculatoire ne permet pas pour autant de définir le temps de traitement d'une nouvelle observation par l'algorithme de catalogage proposé. En effet, nous ne prenons pas en compte le temps nécessaire à la formation des pistes, c'est-à-dire à leur mise en mémoire et leur indexation dans une structure de données, car cela dépend essentiellement de l'architecture matérielle utilisée. Par ailleurs, le coût en calcul du traitement des paires d'observations peut ne pas être négligeable en fonction de la densité d'observations : le nombre de paires d'observations varie en  $\mathcal{O}(n^2)$

alors que le nombre de triplets d'observations varie en  $\mathcal{O}(n^3)$ . Dans l'hypothèse où le coût de traitement d'une paire est plus élevé que le coût de traitement d'un triplet avec une densité d'observations peu élevée, le temps associé au traitement des paires d'observations pourrait avoir un impact significatif.

Une modélisation plus poussée, c'est-à-dire tenant compte des paires d'observations ou faisant l'hypothèse d'une architecture matérielle, pourrait permettre une estimation précise du temps de calcul nécessaire au catalogage d'un scénario difficile à des fins de conception.

# Communications scientifiques

## Revue avec comité de lecture

Castaings, T., Pannetier, B., Muller, F., Rombaut, M.,  
"Track Initiation of Low-Earth-Orbit Objects using Statistical Modeling of Sparse  
Radar Observations,"  
Soumis le 23 Juillet 2013 à IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems

## Conférences avec comité de lecture

Castaings, T., Pannetier, B., Muller, F., Rombaut, M.,  
"Sparse data association for Low Earth Orbit tracking,"  
2012 IEEE Aerospace Conference, Big Sky, Montana, États-Unis

## Conférences sans comité de lecture

Castaings, T., Pannetier, B., Muller, F., Rombaut, M.,  
"Modeling the Combinatorial Complexity of a New Data Association Technique used  
with Narrow Fence-Type Radar Systems for Small LEO Debris Cataloging,"  
IAF, 64th International Astronautical Congress, Pékin, Chine (2012)

Castaings, T., Muller, F., Pannetier, B., Rombaut, M.,  
"Track Initiation using Sparse Radar Data for Low-Earth-Orbit Objects,"  
IAF, 63rd International Astronautical Congress, Naples, Italie (2012)



# Annexes



# Annexe A

## Filtre optimal par corrélation

Pour maximiser le rapport signal à bruit  $RSB$  en sortie d'un bloc de mise en forme, on peut construire un filtre optimal (au sens de la maximisation du  $RSB$ ) par corrélation en considérant le signal  $a(t)$  reçu en présence d'une cible et le signal  $b(t)$  reçu en l'absence de cible. On suppose que  $b(t)$  est un bruit blanc de transformée de Fourier  $B$ . Par ailleurs, on appelle  $h(t)$  la réponse impulsionnelle du filtre optimal recherché,  $A(f)$  et  $H(f)$  les transformées de Fourier de  $a(t)$  et  $h(t)$ , respectivement. Après filtrage, la puissance  $P_S$  du signal reçu en présence de cible s'exprime par (A.1), tandis que la puissance du bruit  $P_B$  s'exprime par (A.2).

$$P_S = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)A(f)df \right|^2 \quad (\text{A.1})$$

$$P_B = B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \quad (\text{A.2})$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient une borne supérieure du rapport signal à bruit  $RSB$  défini par le rapport des puissances  $P_S$  et  $P_B$  et l'on remarque que l'égalité est atteinte si  $H(f) = A^*(f)$ , ce qui permet d'exprimer la valeur maximale de  $RSB$  selon (A.3). Le filtre optimal est alors le filtre de fonction de transfert  $H(f) = A^*(f)$ .

$$RSB_{max} = \frac{P_S}{P_B} \Big|_{max} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |A(f)|^2 df}{B^2} \quad (\text{A.3})$$

Soit  $s(t)$  le signal temporel obtenu par le filtrage d'un signal reçu quelconque  $e(t)$  (contenant un écho et du bruit, ou du bruit seulement) par le filtre de fonction de transfert  $A^*(f)$ . Le théorème de Wiener-Khintchine permet d'écrire le signal temporel  $s(t)$  tel que (A.4), où  $TF^{-1}$  désigne la transformée de Fourier inverse et  $c_{ea}(t)$  la fonction de corrélation du signal  $e(t)$  avec le signal  $a(t)$  attendu en cas de présence d'une cible.

$$s(t) = TF^{-1}(EA^*) = c_{ea}(t) \quad (\text{A.4})$$

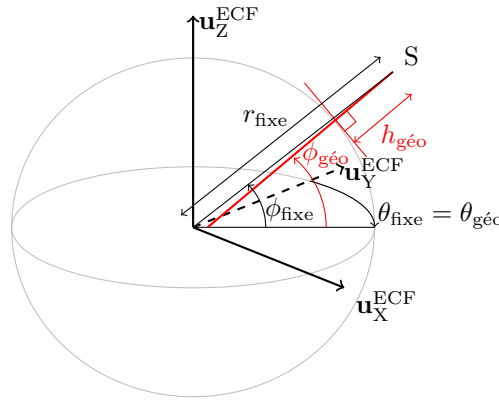


---

En présence d'une cible, on s'attend à recevoir un signal de forme similaire au signal émis, c'est-à-dire que l'on choisit  $a(t)$  égal au signal émis. La corrélation du signal reçu avec le signal émis constitue donc un moyen de filtrage optimal pour la détection.

## Annexe B

### Passage d'un référentiel terrestre fixe à un référentiel géodésique (et vice-versa)



**Figure B.1** – Le système de coordonnées géodésiques utilise un axe orthogonal à un plan tangent passant par un point de la surface du globe pour définir l'altitude  $h_{\text{géo}}$  ainsi que la latitude  $\phi_{\text{géo}}$ .

Le passage du référentiel géocentrique fixe au référentiel géodésique se fait grâce au formulaire (B.1)-(B.3), où  $\theta_{\text{géo}}$ ,  $\phi_{\text{géo}}$  et  $h_{\text{géo}}$  sont la longitude, la latitude et l'altitude dans un repère géodésique,  $\theta_{\text{fixe}}$ ,  $\phi_{\text{fixe}}$  et  $r_{\text{fixe}}$  sont les coordonnées sphériques dans un référentiel géocentrique fixe et  $f$  est le facteur d'aplatissement de la Terre.

$$\theta_{\text{géo}} = \theta_{\text{fixe}} \quad (\text{B.1})$$

$$\phi_{\text{géo}} = \phi_{\text{fixe}} + \frac{\sin(2\phi_{\text{fixe}})}{r_{\text{fixe}}} f + \left( \frac{1}{r_{\text{fixe}}^2} - \frac{1}{4r_{\text{fixe}}} \right) \sin(4\phi_{\text{fixe}}) f^2 \quad (\text{B.2})$$

$$h_{\text{géo}} = r_{\text{fixe}} + r_{\text{eq}} \left( \frac{1 - \cos(2\phi_{\text{fixe}})}{2} f + \left( \frac{1}{4r_{\text{fixe}}} - \frac{1}{16} \right) (1 - \cos(4\phi_{\text{fixe}})) f^2 - 1 \right) \quad (\text{B.3})$$

---

Le passage du référentiel géodésique au référentiel géocentrique fixe se fait grâce à l'équation (B.4), où  $N = \frac{r_{\text{eq}}}{\sqrt{1-(2-f^2)\sin^2\phi_{\text{géo}}}}$ .

$$\mathbf{r}_{\text{fixe}} = \begin{pmatrix} (N + h_{\text{géo}}) \cos(\phi_{\text{géo}}) \cos(\theta_{\text{géo}}) \\ (N + h_{\text{géo}}) \cos(\phi_{\text{géo}}) \sin(\theta_{\text{géo}}) \\ (N(1 + f^2 - 2f) + h_{\text{géo}}) \sin(\phi_{\text{géo}}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Les valeurs des paramètres géodésiques utilisées dans ces travaux sont celles du modèle WGS-84 (World Geodetic System) :

$$\begin{aligned} r_{\text{eq}} &= 6\,378\,137 \text{ m} \\ f &= 1/298,257\,223\,563 \end{aligned}$$

## Annexe C

# Équivalence entre les paramètres orbitaux képlériens et un couple position-vitesse

Il existe une relation bijective entre les paramètres  $\{a, e, i, \Omega, \omega, \nu\}$  et le couple position-vitesse  $\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}$ . Comme nous le verrons dans le Chapitre 5, certaines techniques d'estimation d'orbite visent alors à calculer la position et la vitesse à un instant  $t_0$ , à partir des observations disponibles. Les formules de passages présentées ci-après permettent alors de remonter aux paramètres orbitaux képlériens classiques. Réciproquement, les formules de passage des paramètres orbitaux képlériens permettent de prédire des positions et vitesses à partir de paramètres orbitaux.

Les formules de passage présentées dans cette section ne sont valables que pour le modèle képlérien classique. En effet, seules les équations de passage des paramètres orbitaux SGP vers un couple position-vitesse sont publiées. Pour le passage inverse, on utilise couramment des méthodes numériques comme le propose Vallado [29] et comme nous le verrons dans le Chapitre 5. Ces formules permettent néanmoins d'appréhender au premier ordre la relation entre les paramètres orbitaux et le couple position-vitesse associés à un objet.

### C.1 Passage d'un couple position-vitesse vers les paramètres orbitaux képlériens

Si l'on dispose d'un couple position-vitesse  $\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}$ , le formulaire (C.1)-(C.6) permet de calculer les paramètres  $\{a, e, i, \Omega, \omega, \nu\}$ , où les vecteurs  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  et  $\mathbf{u}_z$  constituent une base orthogonale dans un référentiel GI et  $\mathbf{h} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$  et  $\mathbf{k} = \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{h}$  sont des intermédiaires de calcul.

$$a = \frac{\mu}{2\frac{\mu}{\|r\|} - \|v\|^2} \quad (C.1)$$

$$e = \left\| \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right\| = \|\mathbf{e}\| \quad (C.2)$$

$$i = \arccos \left( \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{u}_z}{\|\mathbf{h}\|} \right) \quad (C.3)$$

$$\Omega = \begin{cases} \arccos \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_y}{\|\mathbf{h}\|} \right) & \text{si } \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_x \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_x}{\|\mathbf{h}\|} \right) & \text{si } \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_x < 0 \end{cases} \quad (C.4)$$

$$\omega = \begin{cases} \arccos \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}}{\|\mathbf{k}\| \|\mathbf{e}\|} \right) & \text{si } \mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_z \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}}{\|\mathbf{k}\| \|\mathbf{e}\|} \right) & \text{si } \mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_z < 0 \end{cases} \quad (C.5)$$

$$\nu = \omega + \begin{cases} \arccos \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{k}\| \|\mathbf{r}\|} \right) & \text{si } \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_z \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{k}\| \|\mathbf{r}\|} \right) & \text{si } \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_z < 0 \end{cases} \quad (C.6)$$

## C.2 Passage des paramètres orbitaux képlériens vers un couple position-vitesse

Dans un référentiel GI, on peut exprimer le couple  $\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}$  grâce aux équations (C.7) et (C.8), où  $r$ ,  $n$  et  $E$  sont des intermédiaires de calcul tels que  $r = \frac{a(1-e^2)}{(1+e \cos \nu)}$ ,  $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$  et  $\{\cos E = \frac{\cos \nu + e}{1+e \cos \nu}, \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin \nu}{1+e \cos \nu}\}$ .

$$\mathbf{r} = r \begin{bmatrix} \sin \Omega \cos \nu + \cos \Omega \cos i \sin \nu \\ \cos \Omega \cos \nu + \sin \Omega \cos i \sin \nu \\ \sin i \sin \nu \end{bmatrix} \quad (C.7)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{-na^2 \sin E}{r} \sin \Omega + \frac{na^2 \sqrt{1-e^2} \cos E}{r} \cos \Omega \cos i \\ \frac{-na^2 \sin E}{r} \cos \Omega + \frac{na^2 \sqrt{1-e^2} \cos E}{r} \sin \Omega \cos i \\ \frac{na^2 \sqrt{1-e^2} \cos E}{r} \sin i \end{bmatrix} \quad (C.8)$$

## Annexe D

# Association des détections issues du passage d'un objet dans le champ de veille

Les observations (*i.e.* arcs courts) peuvent comprendre plusieurs détections fortement redondantes (rapprochées dans le temps et dans l'espace dans un référentiel ECI et fortement bruitées). En effet, la simulation permet d'estimer qu'environ 50% des arcs courts comprennent une unique détection, 45% comprennent deux détections, et 5% comprennent trois détections ou plus.

Les méthodes proposées dans cette étude permettent de traiter les arcs courts comprenant une unique détection. Naturellement, les arcs courts comprenant plusieurs observations peuvent être traités comme plusieurs arcs comprenant une unique observation, mais cela augmente le nombre de pistes à initialiser et donc la complexité combinatoire.

Ce problème peut être résolu en associant de proche en proche les détections issues d'une même traversée. Pour cela, nous utilisons deux composantes du vecteur de description  $\mathbf{x}(i, j)$  associé à une paire d'observations défini au Chapitre 6 :

$$\mathbf{x}_{\text{arc}}(i, j) = \begin{pmatrix} d_r(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \\ d_{r\lambda}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

où  $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\}$  est une paire de détections.

Grâce à la simulation, nous générons un grand nombre de paires de détections successives  $\{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j\}$  issues d'une même traversée et choisissons des seuils pour les valeurs de  $d_r(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)$  et de  $d_{r\lambda}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)$  tels que 95% des cas soient en dessous de ces seuils.

Ainsi, nous sommes capables d'associer les détections issues d'une unique traversée sans ambiguïté aux densités de détection testées. Les arcs obtenus, ou observations, peuvent alors comprendre plusieurs détections, ce qui réduit le nombre de nouvelles pistes à initialiser. Dans cette étude, nous choisissons d'utiliser les mesures de la première détection quand une observation en comprend plusieurs.



# Bibliographie

- [1] O. of Science en Technological Policy, "Interagency report on orbital debris," in *The National Science and Technology Council, Committee on Transportation Research and Development*, 1995.
- [2] E. Pate-Cornell and M. Sachon, "Risks of particle hits during space walks in low earth orbit," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 2001.
- [3] E. Fletcher, "Space situational awareness : An analysis of threats, consequences and future solutions for europe's security, safety and prosperity.," tech. rep., European Space Agency, 2010.
- [4] *ENVISAT AND ERS MISSIONS, Data Access Guide*.
- [5] *Operational Review : RADARSAT-1 & -2*, 2010.
- [6] R. Walker, C. Martin, H. Stokes, J. Wilkinson, H. Sdunnus, S. Hauptmann, P. Beltrami, and H. Klinkrad, "Update of the ESA space debris mitigation handbook," tech. rep., ESA, 2002.
- [7] D. Kessler, "Sources of orbital debris and the projected environment for future spacecraft," *Advances in Space Research*, 1981.
- [8] E. G. Stansbery, "Growth in the number of ssn tracked orbital objects," *55th International Astronautical Congress, Vancouver, Canada*, 2004.
- [9] D. Kessler, "Collisional cascading : The limits of population growth in low earth orbit," *Advances in Space Research*, 1991.
- [10] D. Gregory, J. Mergen, and A. Ridley, "Space debris elimination (spade) phase i final report," tech. rep., Raytheon, BBN Technologies, University of Michigan, 2012.
- [11] P. W. J. Schumacher, "US naval space surveillance upgrade program 1999-2003," in *7th US/Russian Space Surveillance Workshop Proceedings, Naval Postgraduate School, CA*, 2007.
- [12] J. E. Reed, "The AN/FPS-85 radar system," *Proceedings of the IEEE*, 1969.
- [13] P. Chorman, "Cobra dane space surveillance capabilities," in *Proceedings of the 2000 Space Control Conference*.
- [14] F. R. Hoots and R. L. Roehrich, "Models for propagation of norad element sets, spacetrack report no. 3," tech. rep., US Air Force, 1980.
- [15] T. Michal, J. P. Eglizeaud, and J. Bouchard, "Graves : the new french system for space surveillance," in *Proceedings of the 4th European Conference on Space Debris (ESA SP-587)*, 2005.



- 
- [16] J. Darricau, *Physique et théorie du radar*. 1993.
  - [17] S. S. Blackman and R. Popoli, *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. Artech House Radar Library, 1999.
  - [18] R. B. Barrar and R. Deutsch, “Determination of satellite trajectories from track-while-scan radar measurements,” *Military Electronics, IRE Transactions on*, 1961.
  - [19] E. F. Knott, J. F. Shaeffer, and M. T. Tuley, *Radar Cross Section*. Artech House Radar Library, 1985.
  - [20] D. Deirmendjian, “Electromagnetic scattering on spherical polydispersions,” tech. rep., RAND Corporation, 1969.
  - [21] C. L. Stokely, F. J. L. Jr., E. G. Stansbery, J. R. Benbrook, and Q. Juarez, “Haystack and hax radar measurements of the orbital debris environment; 2003,” tech. rep., NASA Lyndon B. Johnson Space Center, 2006.
  - [22] D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, ch. 3.3. Microcosm Press, 4940 West 147th Street, Hawthorne, CA 90250-6708 USA and Springer, 233 Spring Street, New York, NY 10013 USA, 2007.
  - [23] *Cours de Mécanique céleste classique*. Laboratoire d’Astronomie de l’Université de Lille 1 et IMCCE de l’Observatoire de Paris, 2002.
  - [24] D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Microcosm Press, 4940 West 147th Street, Hawthorne, CA 90250-6708 USA and Springer, 233 Spring Street, New York, NY 10013 USA, 2007.
  - [25] J. R. Raol and N. K. Sinha, “On the orbit determination problem,” *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 1985.
  - [26] D. Brouwer, “Solution of the problem of artificial satellite theory without drag,” *Astronomical Journal*, 1959.
  - [27] M. H. Lane, P. M. Fitzpatrick, and J. J. Murphy, “On the representation of air density in satellite deceleration equations by power functions with integral exponents,” tech. rep., Air Force Systems Command, 1962.
  - [28] M. H. Lane and K. H. Cranford, “An improved analytical drag theory for the artificial satellite problem,” *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1969.
  - [29] D. A. Vallado, P. Crawford, R. Hujsak, and T. S. Kelso, “Revisiting spacetrack report no. 3,” tech. rep., American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
  - [30] S. S. Blackman, *Multiple Target Tracking with Radar Applications*. Artech House, 1986.
  - [31] Y. Bar-Shalom, *Multitarget-Multisensor Tracking : Principle and Techniques*. Burlington, MA : Academic Press, 1995.
  - [32] S. Baase, *Computer Algorithms : Introduction to Design and Analysis*. Reading, MA : Addison-Wesley, 1978.
  - [33] *Probabilités analyse des données et statistique*, ch. 14.4.5.2. Editions Technip, 2006.

- [34] S. S. Blackman and R. Popoli, *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*, ch. 3.3. Artech House Radar Library, 1999.
- [35] S. S. Blackman and R. Popoli, *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*, ch. 6.3. Artech House Radar Library, 1999.
- [36] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte, "A new approach for filtering nonlinear systems," in *Proceedings of the American Control Conference, Seattle, Washington, pages 1628-1632*, 1995.
- [37] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte, "A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in nonlinear filters," in *Transactions on Automatic Control, IEEE*, 2000.
- [38] S. S. Blackman and R. Popoli, *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*, ch. 6.6. Artech House Radar Library, 1999.
- [39] J. Dezert, "Introduction au pistage multi-cibles multi-senseurs," Septembre 2003.
- [40] *Multitarget-Multisensor Tracking : Principle and Techniques*, ch. 3.3. Burlington, MA : Academic Press, 1995.
- [41] B.-N. Vo and W.-K. Ma, "The gaussian mixture probability hypothesis density filter," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 2006.
- [42] S. S. Blackman and R. Popoli, *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*, ch. 6.4. Artech House Radar Library, 1999.
- [43] P. Gill, W. Murray, and M. Wright, *Practical Optimization*. Academic Press, New York, 1981.
- [44] T. Kurien, *Issues in the Design of Practical Multitarget Tracking Algorithms*. Ed. Y. Bar-Shalom, Artech House, 1990.
- [45] S. S. Blackman, "Multiple hypothesis tracking for multiple target tracking," *Aerospace and Electronic Systems Magazine, IEEE*, 2004.
- [46] A. Wald, "Sequential tests of statistical hypotheses," *Annals of Mathematical Statistics*, 1945.
- [47] J. Wright, "Optimal orbit determination," in *AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, San Antonio, TX, USA*, 2002.
- [48] J. R. Vetter, "Fifty years of orbit determination : Development of modern astrodynamics methods," *Johns Hopkins APL Technical Digest*, 2007.
- [49] D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, ch. 7.5. Microcosm Press, 4940 West 147th Street, Hawthorne, CA 90250-6708 USA and Springer, 233 Spring Street, New York, NY 10013 USA, 2007.
- [50] D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, ch. 7.6.2. Microcosm Press, 4940 West 147th Street, Hawthorne, CA 90250-6708 USA and Springer, 233 Spring Street, New York, NY 10013 USA, 2007.
- [51] J. Thorne, "A complete series solution," in *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conference, Maui, HI*, 2004.
- [52] D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, ch. 7.6.4. Microcosm Press, 4940 West 147th Street, Hawthorne, CA 90250-6708 USA and Springer, 233 Spring Street, New York, NY 10013 USA, 2007.

- [53] H. Shen and P. Tsiotras, “Using battin’s method to obtain multiple-revolution lambert’s solutions,” in *Paper AAS-03-568 presented at the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. Big Sky, MT.*, 2003.
- [54] G. Tommei, A. Milani, and A. Rossi, “Orbit determination of space debris : admissible regions,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2007.
- [55] G. Tommei, A. Milani, D. Farnocchia, and A. Rossi, “Correlation of space debris observations by the virtual debris algorithm,” in *Proc. of the Fifth European Conference on Space Debris*, 2009.
- [56] L. Dimare, D. Farnocchia, G. Gronchi, A. Milani, F. Bernardi, and A. Rossi, “Innovative system of very wide field optical sensors for space surveillance in the leo region,” in *Proceedings of the Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference*, 2011.
- [57] A. Milani, G. Tommei, D. Farnocchia, A. Rossi, T. Schildknecht, and R. Jehn, “Orbit determination of space objects based on sparse optical data,” *Monthly Notices of Royal Astronomical Society*, 2011.
- [58] D. Farnocchia, G. Tommei, A. Milani, and A. Rossi, “Innovative methods of correlation and orbit determination for space debris,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2010.
- [59] T. Furukawa, , F. Muraoka, and Y. Kosuge, “Multi-target and multi-sensor data fusion by rule-based tracking methodology,” in *SICE ’98. Proceedings of the 37th SICE Annual Conference*, 1998.
- [60] B. Schölkopf, J. C. Platt, J. Shawe-Taylor, A. J. Smola, and R. C. Williamson, “Estimating the support of a high-dimensional distribution,” *Neural Computation*, vol. 13, no. 7, pp. 1443–1471, 2001.
- [61] E. Parzen, “On estimation of a probability density function and mode,” *Annals of Mathematical Statistics*, 1962.
- [62] Y. Bar-Shalom, S. S. Blackman, and R. J. Fitzgerald, “Dimensionless score function for multiple hypothesis tracking,” *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 2007.
- [63] S. S. Blackman and R. Popoli, *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*, ch. 6.2. Artech House Radar Library, 1999.
- [64] L. Y. Pao, “Multisensor multitarget mixture reduction algorithms for tracking,” *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1994.



## Catalogage de petits débris spatiaux en orbite basse par observations radars isolées

Les débris spatiaux sont devenus une menace considérable pour la viabilité des satellites opérationnels en orbite basse. Afin de pouvoir éviter des collisions accidentelles, des systèmes de surveillance de l'espace existent mais sont limités en performances de détection pour les objets de petite taille (diamètre inférieur à 10cm), ce qui pousse à l'étude de nouvelles solutions. Cette thèse a pour objectif d'appuyer la faisabilité d'un système radar au sol utilisant un champ de veille étroit pour le catalogage de petits débris en orbite basse. Un tel système fournirait en effet des observations dites « isolées », c'est-à-dire qu'une orbite n'est pas immédiatement déductible de chacune d'entre elles. Le grand nombre de combinaisons nécessaires est alors prohibitif en termes de temps de calcul pour la résolution de ce problème de pistage. Nous proposons dans ces travaux une nouvelle méthode pour initialiser les pistes, c'est-à-dire associer des observations isolées avec une faible ambiguïté et en déduire des orbites précises. Les pistes ainsi obtenues sont combinées et filtrées grâce à un algorithme de pistage multicible que nous avons adapté aux particularités du problème. Avec un taux de couverture de plus de 80% obtenu en temps réel sur 3 jours pour des scénarios de 500 à 800 objets en plus d'un fort taux de fausses alarmes, les performances de la méthode proposée tendent à prouver la faisabilité du système envisagé. Afin d'extrapoler les résultats obtenus à de plus fortes densités d'observations, nous proposons un modèle de complexité combinatoire calibré sur les performances de l'algorithme aux faibles densités. L'apport d'un second capteur identique est également étudié et met en évidence un point de compromis entre réactivité et complexité combinatoire, ce qui offre un degré de liberté supplémentaire dans la conception d'un tel système.

## Cataloging small debris in low-Earth-orbit using sparse radar data

Space debris have become a significant threat to the viability of operational satellites in Low-Earth-Orbit. In order to avoid accidental collisions, space surveillance systems exist but their detection performance is limited for the small debris (less than 10cm). New solutions are then at study. This thesis aims at supporting the feasibility of a ground-based radar sensor with a narrow-fence type field of regard for the cataloging of the small space debris. Such a system would produce isolated observations, that is to say that an orbit is not directly available from each one of them. The large number of potential combinations is then computationally prohibitive for solving this tracking problem. In this work, we propose a new method for track initiation, i.e. associating isolated observations with little ambiguity and deduce accurate orbits. The obtained set of tracks are combined and filtered using an multitarget tracking algorithm that we have adapted to the peculiarities of the problem. With a coverage rate of more than 80% in real-time on 3 days for 500 to 800-objects scenarios in addition of a high false alarm rate, the performance of the proposed method supports the feasibility of the considered system. Aiming at extrapolating the obtained results to higher observation densities, we propose a combinatorial complexity model calibrated with the algorithm performance for low detection densities. The contribution of a second identical sensor is also assessed and reveals a possible trade-off between reactivity and combinatorial complexity, which offers an additional degree of freedom in the design of such a system.